D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 8.6.2015: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilitá per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in D \subset \mathbb{R}$, allora f é costante in D?

Risposta

(i)

(ii) No, ad esempio se $D = (0,1) \cup (2,3)$ e

$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 2, & x \in (2,3) \end{cases}$ allora $f'(x) = 0 \ \forall x \in D$, ma f non è costante in D

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di $f = o(g)$ per $x \to x_0$.

(ii) Enunciare il Teorema di Taylor con il resto di Peano

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora $\{a_n\}$

[a] non é superiormente limitata; [b] non ha limite finito;

[c] é monotona; [X] é inferiormente limitata.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $a_n \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$, allora $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

Esercizio 2

[3 punti]

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

[a] f é decrescente in $(-\infty, 0)$; [b] esiste $x \in (-\infty, 0)$ tale che $f'(x) = 0$;

[c] f é convessa in $(-\infty, 0)$; [X] esiste $x \in (-\infty, 0)$ tale che $f(x) = 5$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Conseguenza immediata del teorema dei valori intermedi e $f((-\infty, 0]) \subseteq [0, +\infty)$

Esercizio 3

[3 punti]

Tra gli infiniti seguenti (per $x \to +\infty$) $f(x) = e^{4x}x^9$, $g(x) = e^{7x}/x$, $h(x) = e^{\sqrt{x}}x^6$, $k(x) = xe^{2\ln(x)}$ quello di ordine superiore e quello di ordine inferiore sono rispettivamente

[a] f, g [b] f, h

[X] g, k [d] f, k

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty\ \forall \alpha, \beta > 0$, allora $g(x) = \dfrac{e^{7x}}{x}$

è l'infinito di ordine superiore e $k(x) = xe^{\ln(x^2)} = x^3$

è l'infinito di ordine inferiore

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2y^2}{1-t^2} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. a var. separabili con $g(y) = y^2$, $f(t) = \frac{2}{1-t^2}$, $y_0 = 3$, $t_0 = 0$

L'equazione va considerata per $t \in (-1, 1)$. Poiché $g(3) \neq 0$, allora

$$\int_3^{y(t)} \frac{1}{r^2}\, dr = \int_0^t \frac{2}{1-r^2}\, dr \quad \text{da cui} \quad \left[-\frac{1}{r}\right]_3^{y(t)} = \left[\ln\left|\frac{r+1}{r-1}\right|\right]_0^t$$

e quindi

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{3} - \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|} \qquad t \in (-1, 1)$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare il polinomio di Taylor del terzo ordine della funzione

$$\ln(1 + x + x^2)$$

in $x_0 = 0$.

Risoluzione

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad \text{per } t \to 0$$

$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{3}(x+x^2)^3 + o((x+x^2)^3) =$$

$$= x + x^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) + x^3\left(-1 + \frac{1}{3}\right) + o(x^3) =$$

$$= \underbrace{x + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3}_{T_3(x)} + \underbrace{o(x^3)}_{r_3(x)} \quad \text{per } x \to 0$$

Esercizio 6

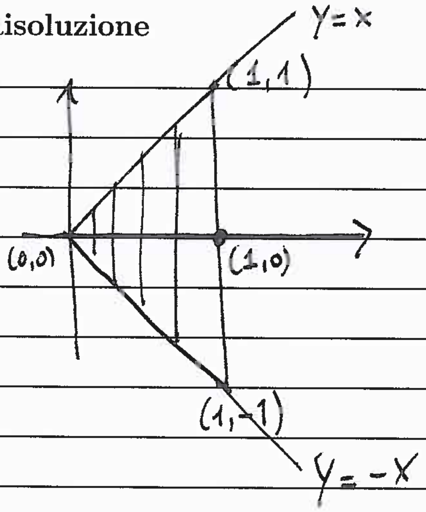
[5 punti]

Calcolare

$$\iint_D (e^x + xy)dx\, dy$$

ove D é il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$.

Risoluzione



$$\iint_D (e^x+xy)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{-x}^{x} (e^x+xy)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[e^x y + \frac{xy^2}{2} \right]_{-x}^{x} dx = \int_0^1 \left[e^x x + \frac{x^3}{2} + e^x x - \frac{x^3}{2} \right] dx$$

$$= \int_0^1 2xe^x\,dx = 2\left[x e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = 2e - 2(e-1) = 2$$