**Appello del 10.1.2012: Compito B**

| D1 | |
|---|---|
| D2 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| E4 | |
| E5 | |
| E5 | |
| $\Sigma$ | |

**Nome:** **Cognome:** **Matricola:**

## Domanda 1

**[3+2 punti]**

(i) Dare la definizione di derivabilità per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0$

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = x^3 + 2$ in $x_0 = 1$.

**Risposta**

(i)

(ii) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \iff y = 3 + 3(x-1) = 3x$

## Domanda 2

**[3+2 punti]**

(i) Dare la definizione di derivate parziali per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(ii) Enunciare il Teorema di Fermat per funzioni di più variabili

**Risoluzione <u>(giustificare la risposta)</u>**

(i)

(ii)

## Esercizio 1

**[3 punti]**

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua allora

- [a] $f$ ammette massimo e minimo in $\mathbb{R}$
- ~~[b]~~ Se $f$ é invertibile, allora $f^{-1}$ é continua
- [c] $\frac{1}{f}$ é continua
- [d] $f$ é derivabile

**Risoluzione** **(giustificare la risposta)**

[b] È il teorema della continuità della funzione inversa

## Esercizio 2

**[3 punti]**

Se $f : [2,4] \to \mathbb{R}$ é una funzione crescente tale che $\int_2^4 f(x)dx = 1$, allora

- [a] $f(x) = 1$ per qualche $x \in [2,4]$
- [b] $f(4) \geq 1$
- ~~[c]~~ $f(2) \leq \frac{1}{2}$
- [d] $f(x) \leq 1$ per ogni $x \in [2,4]$

**Risoluzione** **(giustificare la risposta)**

$1 = \int_2^4 f(x)\,dx \geq f(2)(4-2) = f(2) \cdot 2 \implies f(2) \leq \frac{1}{2}$

(infatti $f$ crescente $\implies f(x) \geq f(2)\ \forall x \in [2,4]$)

## Esercizio 3

**[3 punti]**

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie tale che $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora

- [a] Se $a_n \to +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n^2}$ converge
- [b] Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
- [c] Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge
- ~~[d]~~ Nessuna delle precedenti

**Risoluzione** **(giustificare la risposta)**

[a] falsa perché $\sqrt{n} \to +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ $(a_n = \sqrt{n})$

[b] falsa, perché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge $\left(a_n = \frac{1}{n}\right)$

[c] falsa, perché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, ma $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

## Esercizio 4

**[5 punti]**

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{2\sinh(t)}{5(1-\cosh(t))^{2/5}}\,dt$$

### Risoluzione

Posto $x = \cosh(t)$ $\quad dx = \sinh(t)\,dt$

$$\int \frac{2\sinh(t)}{5(1-\cosh(t))^{2/5}}\,dt = \int \frac{2}{5}\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{5}}}\,dx = -\frac{2}{3}\left(1-\cosh(t)\right)^{\frac{3}{5}} + c$$

$$\int_0^1 \frac{2\sinh(t)}{5(1-\cosh(t))^{2/5}}\,dt = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{2\sinh(t)}{5(1-\cosh(t))^{\frac{2}{5}}}\,dt$$

$$\lim_{c\to 0^+}\left[-\frac{2}{3}\left(1-\cosh(t)\right)^{\frac{3}{5}}\right]_c^1 = -\frac{2}{3}\left(1-\cosh(1)\right)^{3/5}$$

## Esercizio 5

**[5 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{e^x-\sin(x)-1+\frac{x^2}{2}}$$

### Risoluzione

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$$

$$(1+2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^x - \sin(x) - 1 + \frac{x^2}{2} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x + o(x^2)$$

$$-1 + \frac{x^2}{2} = x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{e^x-\sin(x)-1+\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

## Esercizio 6

**[5 punti]**

Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = (x + y + \frac{5}{2})e^{x^2+y^2}$ e classificarli.

## Risoluzione

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, inoltre

$$Df(x,y) = \left(e^{x^2+y^2}\left[(x+y+\tfrac{5}{2})\,2x + 1\right],\ e^{x^2+y^2}\left[(x+y+\tfrac{5}{2})\cdot 2y + 1\right]\right)$$

$$Df(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x^2+2xy+5x+1=0 \\ 2y^2+2xy+5y+1=0 \end{cases} \iff$$

$(x-y)(x+y)$

$$\begin{cases} 2(x^2-y^2) + 5(x-y) = 0 \\ \text{"} \qquad \text{"} \end{cases} \iff x = y \text{ oppure } 2(x+y)+5=0$$

$4x^2+5x+1 \iff x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \frac{-5\pm 3}{8}$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ 2x^2+2x^2+5x+1=0 \end{cases} \iff x = -1,\ x = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{2} - y \\ 2y^2+2y(-\frac{5}{2}+y)+5y+1=0 \end{cases} \text{ impossibile}$$

Punti critici $P_1 = (-1,-1)$, $P_2 = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$

$$f_{xx}(x,y) = e^{x^2+y^2}\left[4x^3+4x^2y+10x^2+6x+2y+5\right]$$

$$f_{yy}(x,y) = e^{x^2+y^2}\left[4y^3+4y^2x+10y^2+6y+2x+5\right]$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^{x^2+y^2}\left[4x^2y+4xy^2+10xy+2y+2x\right]$$

$$Hf(-1,-1) = \begin{bmatrix} -e^2 & -2e^2 \\ -2e^2 & -e^2 \end{bmatrix} = e^4 - 4e^4 = -3e^4 < 0$$

punto di sella

$$Hf(-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}) = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{8}}\cdot\frac{7}{2} & e^{\frac{1}{8}}(-\frac{1}{2}) \\ e^{\frac{1}{8}}(-\frac{1}{2}) & e^{\frac{1}{8}}\cdot\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

PUNTO DI MINIMO LOCALE

$$\det Hf(-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}) = e^{\frac{1}{8}}\left[\frac{49}{4} - \frac{1}{4}\right] > 0,\quad f_{xx}(-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}) > 0$$