D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 10.2.2015: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivate parziali per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(ii) Trovare il dominio di definizione e le derivate parziali di $f(x, y) = y^x$.

Risposta

(i)

(ii) $f(x,y) = e^{x\ln(y)}$ $\quad \mathcal{D}_f = \{(x,y) : y > 0\}$

$f_x(x,y) = e^{x\ln(y)}\ln(y)$; $f_y(x,y) = e^{y\ln(x)} \cdot \frac{x}{y}$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Weierstrass.

(ii) Mostrare con un esempio che il Teorema di Weierstrass non vale in un intervallo aperto.

Risoluzione

(i)

(ii) $f(x) = x \,,\quad x \in (0,1)$

$\inf_{(0,1)} f = 0 \,,\ \sup_{(0,1)} f = 1$, ma il minimo e

il massimo non esiston

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}$ una successione monotona. Allora

- [a] $\{a_n\}$ non é limitata;
- [b] $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste finito;
- [c] $\exists \alpha > 0$ tale che $e^{a_n} > \alpha \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- [d] $|a_n| \le |a_{n+1}| \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

a) no perché $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ monotona e limitata

b) no, perché $a_n = n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

c) no, perché $a_n = \frac{1}{n}$, allora $|a_n| = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = |a_{n+1}|$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$. Allora la funzione $h(x) = \sin(f(x))$

- [a] non é continua in 0
- [b] é derivabile in 0 e $h'(0) \neq 0$
- [X] é derivabile in 0 e $h'(0) = 0$
- [d] é continua, ma non derivabile in 0.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f(0)=0$ perché $f(x) = o(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(f(x)) - \sin(f(0))}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} = 0$$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che che $f(2) = 1$, $f'(x) = \sin(x^2) \ \forall x \in \mathbb{R}$. Allora $\forall c \in \mathbb{R}$

- [X] $f(c) = 1 + \int_2^c \sin(t^2)dt$
- [b] $f(c) = 2 + \int_1^c \sin(t^2)dt$
- [c] $f(c) = 1 \int_2^c \sin(t^2)dt$
- [d] $f(c) = \int_1^c \sin(t^2)dt$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f(c) = f(2) + \int_2^c \sin(t^2)\,dt = 1 + \int_2^c \sin(t^2)\,dt$$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) = te^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione

- eq. omogenea : $\lambda^2 - \lambda = 0 \iff \lambda = 0, \lambda = 1 \implies y_0(t) = C_0 + C_1 e^t$
- Metodo di somiglianza $\bar{y}(t) = t(At+B)e^t = (At^2+Bt)e^t$

$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -1 \end{cases}$ $\quad \bar{y}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right)e^t$

Int. generale $y_0(t) = C_0 + C_1 e^t + \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right)e^t$

$y(0) = C_0 + C_1 = 0 \iff C_0 = -C_1$

$y'(0) = C_1 - 1 = 1 \iff C_1 = 2$

$y(t) = -2 + 2e^t + \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right)e^t$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - \sin(x^3)}{x(e^{x^4} - 1)}$$

Risoluzione

$e^{x^4} - 1 \sim x^4$, quindi $x(e^{x^4} - 1) \sim x^5$

$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \implies \sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{3!} + o(x^9)$

$x^3 - \sin(x^3) \sim \frac{x^9}{3!}$

Sostituendo

$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - \sin(x^3)}{x(e^{x^4} - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^9}{3!}}{x^5} = 0$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Risoluzione

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \,, \quad f(0) = e^{-1}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0 \,, \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$f'(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}} \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$