Appello del 11.9.2012: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione e fare un esempio di funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monotona decrescente.

(ii) Enunciare il teorema sul test di monotonia.

Risposta

(i) ____

____

____

____

(ii) ____

____

____

____

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di matrice Hessiana per una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(ii) Enunciare il teorema di Schwarz sulle derivate seconde di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Risoluzione

(i) ____

____

____

____

____

(ii) ____

____

____

____

____

____

____

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) > 0$. Allora

- [a] f é costante
- [b] l'insieme $\{\cos(f(x)) : x \in [a, b]\}$ ammette massimo
- [c] $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$;
- [d] non esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché la funzione $\cos(f(x))$ é continua sull'insieme $[a,b]$

Esercizio 2

[3 punti]

Siano f, g due funzioni tali che $f + g$ é derivabile in $x = 0$. Allora

- [a] f e g sono derivabili in $x = 0$
- [b] f e g sono continue in $x = 0$
- [c] Nessuna delle risposte precedenti é vera
- [d] Esiste finito $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + g(x) - f(0) - g(0)}{x}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per definizione di derivabilità di $f+g$ in $x=0$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to R$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0). Indicare quale tra le seguenti affermazioni é *falsa*

- [a] f é continua in (x_0, y_0)
- [b] esistono le derivate direzionali di f in (x_0, y_0)
- [c] esiste il piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0)
- [d] Se $Df(x_0, y_0) = 0$, (x_0, y_0) é punto di estremo locale

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti $Df(x_0, y_0) = 0$ non implica che f ammetta un estremo locale in (x_0, y_0)

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} (2x)^{\sin(x)}$$

Risoluzione

$$\lim_{x\to 0^+} (2x)^{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin(x)\left[\ln(x)+\ln(2)\right]}$$

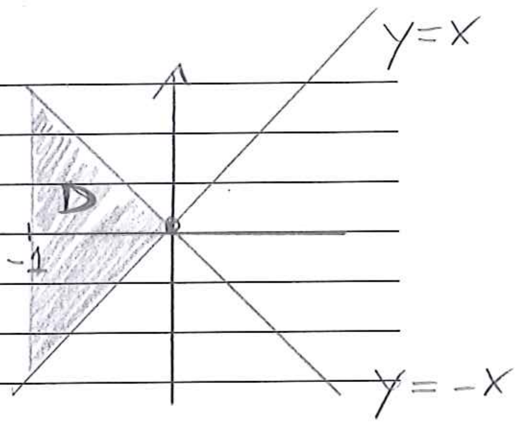
$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\left[\underbrace{x\ln(x)}_{\to 0} + \underbrace{x\ln(2)}_{\to 0}\right]} = e^{0} = 1$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare $\iint_D y^2 e^{(x^2)}\, dx\, dy$ ove $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 0,\ x\le y\le -x\}$ (disegnare il dominio).

Risoluzione



$$\iint_D y^2 e^{(x^2)}\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} e^{x^2}\int_{x}^{-x} y^2\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} e^{x^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{x}^{-x} dx =$$

$$= -\frac{2}{3}\int_{-1}^{0} e^{x^2}x^3\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\left[e^{x^2}(x^2-1)\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Risolvere

$$\begin{cases} y'(t) + \frac{y(t)}{t} = 2e^t \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

e calcolare $\lim_{t\to0^+} ty(t)$.

Risoluzione

Applicando la formula di risoluzione per eq. diff. ordinarie lineari del 1° ordine

$$y(t) = Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)}\int f(t)\, e^{A(t)}\, dt$$

ove $A(t) = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t|$ e $f(t) = 2e^t$

si ottiene

$$y(t) = \frac{2e^t(t-1)+C}{t}$$

Imponendo la cond. iniziale si ha

$$y(t) = \frac{2}{t}\left(e^t(t-1) - e^2 + 1\right)$$

da cui

$$\lim_{t\to0^+} t\, y(t) = 2(-1-e^2+1) = -2e^2$$