E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 15.2.2013: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+2 punti]

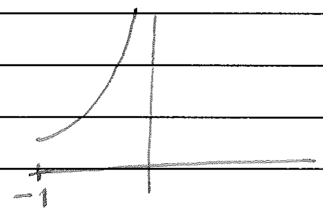
(i) Dare la definizione di continuità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di funzione continua, ma non limitata nell'intervallo $(-1, 0)$.

Risposta

(i)

(ii) $f(x) = \frac{1}{x^2}$



Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di $f = o(g)$ per $x \to x_0$

(ii) Enunciare il Teorema sulla formula di Taylor con il resto di Peano.

Risposta

(i)

(ii)

Esercizio 1
[3 punti]

Sia $T_2(x)$ il polinomio di Taylor di ordine 2 in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 6 + \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $T_2(-2)$ vale

- [a] 6
- [b] 0
- [c] 8
- [~~d~~] 4

Risoluzione <u>**(giustificare la risposta)**</u>

Si ha dal teo. fondamentale del calcolo integrale $f'(x) = \sqrt{1+x^2}$

$f''(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$, quindi $T_2(x) = 6 + x$ e $T_2(-2) = 4$

Esercizio 2
[3 punti]

$(1+i)^5$ é uguale a

- [~~a~~] $-(4+4i)$
- [b] $4+4i$
- [c] $8(1-i)$
- [d] $8(i+1)$

Risoluzione <u>**(giustificare la risposta)**</u>

$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$(1+i)^5 = 2^{5/2}\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right) = 2^{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) =$

$= 4(-1-i)$

Esercizio 3
[3 punti]

L'estremo inferiore dell'insieme $\left\{1 - \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ é

- [a] $\frac{3}{4}$
- [b] 0
- [c] $+\infty$;
- [d] 1 e 0

Risoluzione <u>**(giustificare la risposta)**</u>

$A := \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\right\} = \left\{1 - \frac{1}{n^2} : n \text{ pari}\right\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n^2} : n \text{ dispari}\right\}$

$\inf A = \inf\left\{1 - \frac{1}{n^2} : n \text{ pari}\right\} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Esercizio 4

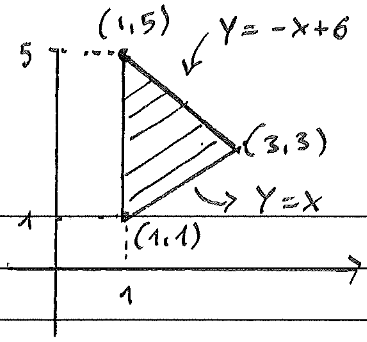
[5 punti]

Calcolare

$$\iint_D xy \, dxdy$$

ove D é il triangolo di vertici $(1,1)$, $(3,3)$ e $(1,5)$.

Risoluzione



$D = \{(x,y) : x \in [1,3],\ x \leq y \leq -x+6\}$

$$\iint_D xy\, dxdy = \int_1^3 \int_x^{-x+6} xy\, dxdy = \int_1^3 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_x^{-x+6} dx =$$

$$= \int_1^3 \left[(-x+6)^2 \cdot \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}\right] dx = \int_1^3 \left[-6x^2 + 18x\right] dx =$$

$$= \left[-2x^3\right]_1^3 + \left[9x^2\right]_1^3 = 20$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right)$$

Risoluzione

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x\ln(x+1)}$$

$x\ln(x+1) \sim x^2$

$\ln(x+1) - x = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x \sim -\frac{x^2}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right) = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il grafico della funzione $f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x+1}}$.

Risoluzione

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f(x) = 0 \iff x = 1$ e $f(x) \begin{cases} >0 & \text{se } x>1 \\ <0 & \text{se } x<1 \end{cases}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$

$f'(x) = e^{\frac{x}{x+1}} \left(\frac{x^2+3x}{(x+1)^2} \right)$

$f'(x) = 0 \iff x=0$ e $x=-3$

$f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

$f'(x) < 0$ se $x \in (-3, -1) \cup (-1, 0)$

$x=0$ punto di minimo locale $(f(0) = -1)$

$x=-3$ punto di massimo locale $(f(-3) < 0)$

$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = 0$