Appello del 17.2.2012: Compito ~~A~~ B

Nome: Cognome: Matricola:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+2+1 punti]

Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$,

(i) definire la successione delle ridotte N-esime.

(ii) Dare la definizione di convergenza assoluta della serie.

(iii) Fare un esempio di serie convergente, ma non assolutamente convergente.

Risposta

(i) $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \quad , N \in \mathbb{N}$

(ii) La serie conv. assolutamente se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge

(iii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge, ma non converge assolutamente

Domanda 2

[2+2+1 punti]

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,

(i) dare la definizione di partizione di $[a, b]$;

(ii) dare la definizione di integrabilità secondo Riemann per f;

(iii) fare un esempio di funzione limitata, ma non integrabile secondo Riemann.

Risoluzione

(i) $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$

(ii) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata è integrabile se $\inf\{S(f,P) : P \text{ partizione}\} = \sup\{s(f,P) : P \text{ partizione di } [a,b]\} = \int_a^b f(x)\,dx$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$ funzione di Dirichlet

Esercizio 1

[3 punti]

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua, allora

- [a] $|f(x)| > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- [b] $\lim_{x \to +\infty} f(x) > -\infty$;
- [c] f é limitata inferiormente;
- [d] ☒ esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in (-1, 1)$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teo di Weierstrass, $\exists\, m = \min_{[-1,1]} f$. In particolare $f(x) \geq m \quad \forall x \in (-1, 1)$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f(x) = x^4 + 3x + 1$ e sia $T_6(x)$ il polinomio di Taylor di ordine 6 di f in $x_0 = 0$. Allora $T_6(1)$ vale

- [a] -1
- [b] ☒ 5
- [c] 0
- [d] π

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè f è un polinomio di grado 4, $T_6(x) = f(x)$ quindi $T_6(1) = f(1) = 5$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$

- [a] non converge
- [b] converge assolutamente
- [c] converge semplicemente
- [d] ☒ Nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

a) Per $a_n = n^2+1$, si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ convergente

b) Per $a_n = n+1$, si ha $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ non converge assolutamente

c) Per $a_n = 1$, si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ oscillante

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) + y(t) = e^t$con le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Risoluzione

Sol. eq. omogenea: $\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i$

quindi $y_0(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$

Sol. particolare eq. non omogenea (metodo di somiglianza)

$\bar{y}(t) = C e^t \implies C = \frac{1}{2}$ quindi $\bar{y}(t) = \frac{1}{2} e^t$

Sol. del pb. di Cauchy

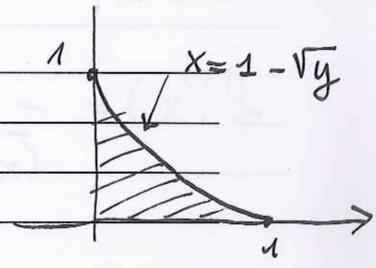
$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{e^t}{2}$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$, ove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ \sqrt{y} + x \leq 1\}$ (disegnare il dominio).

Risoluzione



$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-\sqrt{y}} (x+y)\,dx \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^{1-\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{(1-\sqrt{y})^2}{2} +$$

$D = \{(x,y) : y \in [0,1],\ 0 \leq x \leq 1 - \sqrt{y}\}$, è x-semplice

$$+ (1-\sqrt{y})\,y\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \sqrt{y} + \frac{3}{2} y - y^{\frac{3}{2}} \right) dy =$$

$$= \left[\frac{1}{2} y - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} y^2 - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{5}$$

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x}{x^2-x-2}$

Risoluzione

$x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1$ e $x = 2$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f(x) > 0 \iff \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \iff$

$x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ asintoto orizzontale

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{-x^2 - 2}{(x^2 - x - 2)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow$ funzione decrescente negli intervalli del dominio