Appello del 2.9.2013: Compito B

Nome: Cognome: Matricola:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+2 punti]

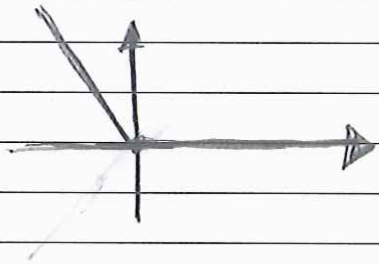
(i) Dare la definizione di derivata di una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in un punto $x_0 \in (a, b)$.

(ii) Fare un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che la sua derivata destra in 0 sia 0 e la sua derivata sinistra in 0 sia -1.

Risposta

(i)

(ii) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$



Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunicare il Teorema di cambiamento di variabili per gli integrali doppi

(ii) Esprimere in coordinate polari il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$.

Risoluzione

(i)

(ii)

$D' = \{(\rho, \vartheta) : \rho \in [2, 4], \vartheta \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]\}$

Esercizio 1 **[3 punti]**

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora

[a] $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste finito

[b] $\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata

[X] $\left\{\frac{1}{1+a_n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata;

[d] $\left\{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^2\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitata

Risoluzione (giustificare la risposta)

$1+a_n^2 \geq 1 \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+a_n^2} \leq 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$

Esercizio 2 **[3 punti]**

Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile in $(0,0)$ e tale che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Allora

[a] f é differenziabile in $(0,0)$

[b] $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=0$ per ogni versore v

[c] $(0,0)$ é un punto di sella

[X] nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

[a] derivabilità $\not\Rightarrow$ differenziabilità

[b] derivabilità $\not\Rightarrow$ esistenza derivate direzionali

[c] In $(0,0)$ potrei avere un punto estremale

Esercizio 3 **[3 punti]**

La funzione $F(x)=\int_0^x e^{-t^6}dt$ é

[a] decrescente in $(0,+\infty)$

[X] crescente in $(0,+\infty)$

[c] non limitata in $(0,+\infty)$

[d] negativa in $(0,+\infty)$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$F'(x)=e^{-x^6} \ \forall x\in\mathbb{R}$, quindi $F'(x)>0$ in $(0,+\infty)$

da cui F crescente in $(0,+\infty)$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8n^n + 4n!}{7n^{13} + 6e^{n\ln(n)}}$$

Risoluzione

$e^{n\ln(n)} = e^{\ln(n^n)} = n^n$ da cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8 + 4\frac{n!}{n^n}}{7\frac{n^{13}}{n^n} + 6} = \frac{8}{6}$$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare

$$\int_{e^{-1}}^{e^2} |\ln(x)|\, dx$$

Risoluzione

Vedi compito 4

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) > 0 \quad \forall x \in D_f$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e$ (asintoto orizzontale)

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$

$f'(x) = 2\, e^{\frac{x-1}{x+1}} \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = 0$

$f''(x) = -4\, e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot x \begin{cases} > 0 & \text{per } x < 0 \\ < 0 & \text{per } x > 0 \end{cases}$