Appello del 8.1.2013: Compito B

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza per una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (definendo la successione delle ridotte n-sime).

(ii) Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(0) = 3$. Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x\cos(x)}$

Risposta

(i)

(ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x\cos(x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\cos(x) - x\sin(x)} = 3$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora

- [a] $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non é monotona
- [b] $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste finito
- [c] $\lim_{n\to\infty} \sin(a_n)$ non esiste;
- [X] [d] Esiste $\alpha > 0$ tale che $e^{a_n} > \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

a) falso: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ limitata e monotona

b) falso: $(-1)^n$ non ammette limite

c) falso: $a_n = \frac{1}{n}$ limitata e $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^1([0,1])$ tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 2$. Allora

- [X] [a] Esiste $x \in [0,1]$ t.c. $f'(x) = 2$
- [b] $f'(0) \geq 0$
- [c] f é invertibile
- [d] f é convessa

Risoluzione (giustificare la risposta)

Teo. di Lagrange in $[a,b] = [0,1]$. $\exists x \in [0,1]$ t.c.

$$2 = f(1) - f(0) = f'(x)(1-0) = f'(x)$$

Esercizio 3

[3 punti]

Il piano tangente al grafico di $f(x,y) = y\cos(x)$ nell'origine é dato da

- [a] $z = x$
- [X] [b] $z = y$
- [c] $z = y\cos(x)$
- [d] $z = 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f_x(x,y) = -y\sin(x) \rightarrow f_x(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = \cos(x) \qquad f_y(0,0) = 1$

$$z = f(0,0) + f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y = y \iff \boxed{z = y}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (t-1)^2 y'(t) = t y(t) \\ y(2) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Scriviamo il pb. in forma normale $\begin{cases} y'(t) = \frac{t\,y(t)}{(t-1)^2} \\ y(2) = \alpha \end{cases}$,

si tratta di una equazione a var. separab.

- Sol. stazionarie: $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$. Per $y(2) = 0$, sol. stazionaria $y(t) = 2 \quad \forall t \in (1, +\infty)$

- Separazione variabili $\int_\alpha^{y(t)} \frac{dr}{r} = \int_2^t \frac{s}{(s-1)^2} ds \Leftrightarrow$

$\ln|y(t)| - \ln|\alpha| = -\frac{1}{t-1} + \ln|t-1| \cdot 1 \quad \forall t \in (1, +\infty)$

$\Leftrightarrow |y(t)| = |\alpha| \cdot e^{1-\frac{1}{t-1}} \cdot (t-1)$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2(\cos(x) - 1)}$$

Risoluzione

$\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2(\cos(x) - 1) \sim -\frac{x^4}{2}$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \Rightarrow \sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 =$

$= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \Rightarrow x^2 - \sin^2(x) = \frac{x^4}{3} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{3}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2(\cos(x) - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{3}}{-\frac{x}{2}} = -\frac{2}{3}$

Esercizio 6 [5 punti]

Trovare i punti critici della funzione $f(x, y) = -y^3 + y^2 + x^2 - yx^2 + 5y - 4$ e classificarli.

Risoluzione

$$Df(x,y) = (2x - 2xy, -3y^2 + 2y - x^2 + 5) \overset{!}{=} (0,0)$$

$$\begin{cases} 3y^2 - 2y + x^2 - 5 = 0 \\ 2x(1-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3y^2 - 2y - 5 = 0 \end{cases} \iff y = \frac{1 \pm \sqrt{1+15}}{3} = \begin{matrix} \frac{5}{3} \\ -1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \iff x = \pm 2$$

Punti critici $P_1 = \left(0, \frac{5}{3}\right)$; $P_2 = (0, -1)$; $P_3 = (2, 1)$; $P_4 = (-2, 1)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & -6y + 2 \end{bmatrix}$$

$$Hf(P_1) = \begin{bmatrix} 2 - \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \det Hf(P_1) = \frac{32}{3} \\ f_{xx}(P_1) = -\frac{4}{3} \end{matrix}\right\} \text{punto di max. loc.}$$

$$H(P_2) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \det Hf(P_2) = 32 \\ f_{xx}(P_2) = 4 \end{matrix}\right\} \text{punto di min. loc.}$$

$$Hf(P_3) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \quad \det Hf(P_3) = -16 \ \} \text{ punto di sella}$$

$$Hf(P_4) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad \det Hf(P_4) = -16 \quad \text{punto di sella}$$