D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 10.1.2019: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dare la definizione di $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Descrivere il comportamento di $\lim_{n\to\infty} q^n$, al variare di $q \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii)

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q>1 \\ 1 & q=1 \\ 0 & |q|<1 \\ \nexists & q\leq -1 \end{cases}$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dare la definizione di derivabilità parziale di f rispetto x in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Se possibile, fare un esempio di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile, ma non continua.

Risoluzione

(i)

(ii)

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $D = (a,b) \cup (c,d)$, $f : D \to \mathbb{R}$ derivabile e $f'(x) = 0 \ \forall x \in D$. Allora

- [a] $f(x)$ é costante in D
- [b] $f(b) \leq f(c)$
- [X] f assume un numero finito di valori
- [d] Se $f(b) < 0$ e $f(c) > 0$, esiste $x \in D$ tale che $f(x) = 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché f è costante in (a,b) e f è costante in (c,d), allora assume al più due valori

Esercizio 2

[3 punti]

Sia La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+5}{4n+2}\right)^n$

- [X] converge assolutamente
- [b] diverge
- [c] converge semplicemente ma non assolutamente
- [d] oscilla

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{2n+5}{4n+2}\right)^n \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2n+5}{4n+2}\right)^n$, $\left(\frac{2n+5}{4n+2}\right)^n \sim \left(\frac{1}{2}\right)^n$

e $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è una serie geometrica convergente

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x^\alpha})$ é integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$ se

- [a] $\alpha > 1$
- [b] $\alpha > 0$
- [X] $\alpha > 2$
- [d] nessun α

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ per $x \to +\infty$

e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx < +\infty \iff \alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = e^t\,(y(t)^2 - 1) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. a variabili separabili $y'(t) = g(y(t)) \cdot f(t)$
con $g(y) = (y^2 - 1)$, $f(t) = e^t$

1) Sol. stazionarie: $g(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \pm 1$
quindi per $\alpha = \pm 1$, si hanno sol. stazionarie

2) Per $\alpha \neq \pm 1$, $\displaystyle\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{r^2 - 1}\, dr = \int_0^t e^r\, dr$

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{r^2-1}\, dr = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1-r}{1+r}\right|\right]_\alpha^{y(t)} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1-y(t)}{1+y(t)}\right| - \ln\left|\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right|\right]$$

$\displaystyle\int_0^t e^r\, dr = e^t - 1$ da cui

$$\ln\left|\frac{1-y(t)}{1+y(t)}\right| = 2(e^t - 1) + \ln\left|\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right|$$

Esercizio 5

[4 punti]

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x \cdot \sin(2x) - 6\ln(1+x^2)}{x^4}$$

Risoluzione

Al 4° ordine $3x \sin(2x) = 3x\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3)\right) =$
$= 6x^2 - 4x^4 + o(x^4)$

$6\ln(1+x^2) = 6\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = 6x^2 - 3x^4 + o(x^4)$

$3x \cdot \sin(2x) - 6\ln(1+x^2) = x^4(-4+3) + o(x^4)$
$\sim -x^4$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x \cdot \sin(2x) - 6\ln(1+x^2)}{x^4} = -1$$

Esercizio 6 [5 punti]

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \text{[illegible]} = \sqrt{x-1}\, e^{-(x-1)}$$

verificando se esistono asintoti obliqui.

Risoluzione

Dominio: $[1, +\infty)$

Segno: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty)$

Zeri: $f(x) = 0 \iff x = 1$

Limiti: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Derivata:

$$f'(x) = e^{-(x-1)} \frac{(3-2x)}{\sqrt{x-1}}, \quad x \in (1, +\infty)$$

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$

$f'(x) > 0 \iff x < 3/2$, $f'(x) < 0 \iff x > 3/2$

$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$