Appello di Ing. Gestionale del 12.1.2018: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

(ii) Fare un esempio di una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = -\infty$, $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

Risposta

(i)

(ii)

$a_n = (-1)^n n^2$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale

(ii) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $F(x) = 1 + \int_0^x 2e^{-t^2}dt$ nel punto $x_0 = 0$

Risoluzione

(i)

(ii) Eq. piano tangente: $y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$

$F(0) = 1$, $F'(x) = 2e^{-x^2} \Rightarrow F'(0) = 2$; quindi

$y = 1 + 2 \cdot x$

Esercizio 1

[3 punti]

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivabile in $x = 0$, allora

- [a] $|f|$ é derivabile in $x = 0$;
- [b] $|f|$ non é derivabile in $x = 0$;
- [c] ☒ $|f|$ é continua in $x = 0$;
- [d] $f(0) = 0$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

f derivabile in $x=0 \Rightarrow f$ continua in $x=0 \Rightarrow$

$|f|$ continua in $x=0$ (composizione di funz. continue)

Esercizio 2

[4 punti]

Sia $\sum_n b_n$ una serie convergente e sia $a_n = (-1)^n b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

- [a] $\sum_n a_n$ diverge
- [b] ☒ $\lim_{n\to\infty} \sin(a_n) = 0$
- [c] $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é non decrescente
- [d] $\sum_n a_n$ é convergente

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

da cui $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e quindi $\lim_{n\to\infty} \sin(a_n) = 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che $f(-2) = f'(-2) = 0$. Allora

- [a] $f = o((x+2)^2)$ per $x \to -2$
- [b] ☒ $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{(x+2)^2}$ esiste finito
- [c] $f = o((x+2)^3)$ per $x \to -2$
- [d] f ha un punto di estremo locale in $x_0 = -2$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dalla formula di Taylor in $x_0 = -2$, si ha

$f(x) = f(-2) + f'(-2)(x+2) + f''(-2)\dfrac{(x+2)^2}{2!} + o((x+2)^2)$

quindi $f(x) \sim f''(-2)\dfrac{(x+2)^2}{2!}$ per $x \to -2$ e

$$\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{(x+2)^2} = \frac{f''(-2)}{2!}$$

Esercizio 4 [4 punti]

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}dx.$$

Risoluzione

$$\frac{x-1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+Bx+2A-2B}{(x^2-4)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-2B=-1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{4},\ B=\frac{3}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}dx = \int_0^1 \frac{1}{4}\frac{1}{x-2}dx + \int_0^1 \frac{3}{4}\frac{1}{x+2}dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\ln|x-2|\right]_0^1 + \left[\frac{3}{4}\ln|x+2|\right]_0^1 = \dots\dots$$

Esercizio 5 [4 punti]

Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{y(t)}{t} = \dfrac{t}{t^2+1} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. diff. del 1º ordine lineare $y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$

con $a(t) = -\frac{1}{t}$, $b(t) = \frac{t}{t^2+1}$ $\Rightarrow$ sol. in $(0,+\infty)$

$$A(t) = -\int_1^t \frac{1}{s}\,ds = \left[-\ln|s|\right]_1^t = -\ln(t)$$

$$\int_1^t \frac{s}{s^2+1} e^{\ln(s)}ds = \int_1^t \frac{s^2}{s^2+1}ds = \int_1^t \frac{s^2+1}{s^2+1}ds - \int_1^t \frac{1}{s^2+1}ds =$$

$$= t-1-\arctan(t)+\frac{\pi}{4}$$

$$y(t) = \frac{1}{t}\left[\cancel{1}+t-\cancel{1}+\frac{\pi}{4}-\arctan(t)\right] = \frac{4t+\pi-4\arctan(t)}{4t}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = |e^{x^2-x} - 1|$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

$\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, f continua in $\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$ e $f(x)=0$ $\Leftrightarrow e^{x^2-x}-1=0 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0$ e $x=1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$$

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2-x}-1 & \text{se } x^2-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0 \text{ e } x\geq 1 \\ 1-e^{x^2-x} & \text{se } x^2-x<0 \Leftrightarrow x\in(0,1) \end{cases}$$

Per $x\neq 0$ e $x\neq 1$, f è derivabile e

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x^2-x}(2x-1) & \text{se } x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty) \\ \cancel{1}-e^{x^2-x}(2x-1) & \text{se } x\in(0,1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} f'(x)=1, \ \lim_{x\to 1^-} f'(x)=-1 \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x)=1, \ \lim_{x\to 0^-} f'(x)=-1 \end{array}\right\} \text{Punti angolosi in } x=0 \text{ e } x=1$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0 \text{ se } x\in(0,\tfrac{1}{2})\cup(1,+\infty) \\ f'(x)<0 \text{ se } x\in(-\infty,0)\cup(\tfrac{1}{2},1) \end{array}\right\} \Rightarrow x=\tfrac{1}{2} \text{ è un punto di max. locale}$$