PLAN of STUDY/RESEARCH for the academic year 2016/2017

Name: Ruggero **Surname:** Freddi

CYCLE: XXXII

- Curriculum

  - [X] Mathematics for Engineering
  - [ ] Electromagnetics
  - [ ] Science of Materials

C	
R	
S	
Visto	

C: Courses

- *"Nonlinear Ordinary Differential Equations: Perturbation Methods & Applications"*, tenuto dalla Prof.ssa Sandra Carillo.
- *"Equazioni Differenziali non Lineari"*, tenuto dal Prof. Lucio Boccardo.
- *"Problemi a Valori al Bordo in Domini con Frontiere Irregolari"*, tenuto dalla Prof. Maria Rosaria Lancia, Prof. Maria Agostina Vivaldi.

.

R: Research perspectives

L'indice di Morse riveste grande rilevanza tanto in questioni pratiche quanto in questioni teoriche. In geometria differenziale fornisce informazioni circa la topologia della varietà, in analisi variazionale riassume informazioni circa il carattere minimale di una soluzione di un EDP per il funzionale associato all'equazione (vedi ad esempio [3]), mentre da un punto di vista fisico fornisce informazioni circa la stabilità di una soluzione. Nella formulazione variazionale della meccanica lagrangiana si associano i moti del sistema, ovvero le soluzioni del problema, ai punti singolari di un opportuno funzionale d'azione; in particolare ci si interessa ai punti di minimo di tale funzionale perché rappresentano soluzioni, in qualche senso, stabili. È possibile dimostrare che per tempi brevi i punti singolari sono tutti minimi del funzionale d'azione. Questo smette di essere vero per tempi lunghi. Dato un punto iniziale, i punti in cui si perde la minialità della soluzione sono detti punti coniugati del punto di partenza. Quindi tra un punto coniugato e l'altro la soluzione minimizza il funzionale d'azione. Il teorema dell'indice di Morse nel calcolo delle variazioni garantisce che il numero di punti coniugati coincide con l'indice di Morse della soluzione stessa e risulta essere finito (vedi [5], p. 83).
Nel corso della mia ricerca verranno affrontate alcune questioni ispirate dall'equazione semilineare ellittica

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda \frac{e^{u(x)}}{\int_\Omega e^u} = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

dove Ω è un dominio regolare limitato di $\mathbb{R}^2$. Tale equazione si incontra in campi quali il modello dei vortici per flussi euleriani turbolenti di Onsager, usati nello studio di fluidi incompressibili, nella teoria della combustione, nelle equazioni di reazione/diffusione e nella descrizione del moto di fluidi vicino ad una superficie in caso di alte velocità del fluido stesso. Questo problema è chiaramente di natura variazionale e le sue soluzioni sono i punti critici del funzionale

$$J_\lambda(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \log \int_\Omega e^u.$$

È stato provato in [2] che tale funzionale è coercivo e compatto per $\lambda < 8\pi$, quindi sotto tale ipotesi J_λ ammette minimo e il problema (1) ammette almeno una soluzione (il cui indice di Morse è ovviamente 0). Il caso $\lambda \geq 8\pi$ risulta essere più complicato in quanto in generale l'operatore J_λ può non essere compatto e coercivo. In questo caso, l'esistenza di una soluzione dipende dalla geometria del dominio Ω. In [1] viene considerato il caso di un dominio con un "piccolo buco", ovvero

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda \frac{e^{u(x)}}{\int_{\Omega_\varepsilon} e^u} = 0 & x \in \Omega_\varepsilon \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{2}$$

dove $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(\xi, \varepsilon)$, $\xi \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ piccolo a sufficienza di modo che $B(\xi, \varepsilon) \subseteq \Omega$. In questo contesto viene dimostrata l'esistenza di una soluzione per tale equazione nel caso in cui $\lambda \notin 8\pi\,\mathbb{N}$ e l'esistenza con alcune ipotesi aggiuntive di simmetria per Ω_ε nel caso in cui $\lambda \in 8\pi\,\mathbb{N}$ (vedi [1]). L'obiettivo della mia ricerca è studiare l'indice di Morse di tali soluzioni. A tal fine prenderò come punto di partenza l'articolo di Gladiali e Grossi, [4], in cui vengono provate delle stime per gli autovalori della forma quadratica associata al funzionale di un equazione simile a (2), partendo dalla formulazione variazionale degli stessi e studiando il quoziente di Rayleigh. Gli obiettivi che mi propongo per questo primo anno di ricerca sono lo studio della teoria di Morse, l'arricchimento del mio bagaglio culturale circa la risolubilità di equazioni ellittiche non lineari e l'acquisizione di una profonda comprensione delle tecniche che fino ad ora hanno portato con successo al calcolo, o almeno ad una stima, dell'indice di Morse relativo a punti stazionari di funzionali relativi a equazioni note che mostrano affinità con l'equazione da me presa in esame.

References

[1] Mohameden Ould Ahmedou and Angela Pistoia, *On the supercritical mean field equation on pierced domains*, (2013) arXiv:1312.3768.

[2] Emanuele Caglioti, Pierre-Louis Lions, Carlo Marchioro, and Mario Pulvirenti, *A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: A statistical mechanics description*, Comm. Math. Phys. **143** (1992), 501-525.

[3] Francesca De Marchis, Isabella Ianni, and Filomena Pacella, *Exact Morse index computation for nodal radial solutions of Lane-Emden problems*, Math. Ann. (2016), 1-43.

[4] Francesca Gladiali and Massimo Grossi, *On the spectrum of a nonlinear planar problem*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26** (2009), 191-222.

[5] John Milnor, *Morse Theory*, Ann. of Math. Stud., vol. 51, Princeton University Press, Princeton, 1963.

S: Supervisor

Tutor: **Prof.ssa Angela Pistoia**