Questi appunti non vanno studiati!

Una prima parte (metrologia, sistemi di unità di misura) va letta per cultura generale; una seconda (teoria della misura) va “gustata”: letta e riletta per apprezzarne le sfumature e le implicazioni nella vita di tutti i giorni; una terza (elaborazione dati) va applicata ogni volta che si vorrà riportare una misura.

Verranno descritte delle “convenzioni” da seguire ispirate a criteri di praticità, alcune in osservanza di leggi dello stato, altre per normative scaturite da necessità di tipo scientifico: sarà un’utile palestra per trattare con rigore una disciplina governata parzialmente anche dal caso.

Lo scopo principale di un corso di laboratorio è toccare con mano la differenza profonda fra teoria e realtà e sfruttare semplici strumenti statistici per implementare criteri decisionali oggettivi in presenza di incertezze inevitabili.

La parte applicativa di laboratorio (qui non descritta perché in continua evoluzione) vi richiederà di rispolverare le vostre capacità di calcolo offuscate dall'uso troppo frequentemente acritico di calcolatrici e calcolatori. Ma i due ingredienti base, le due capacità pregresse indispensabili per avere successo negli studi, non li troverete nei libri: capacità di ragionamento e tanta tanta curiosità.

Adalberto Sciubba

METROLOGIA

(Insieme delle regole e delle tecniche che conducono alla misura di grandezze fisiche)

Per operare nella realtà (è il compito degli ingegneri) è necessario descrivere i fenomeni in modo:
- **OGGETTIVO** (non dipendente dalle qualità, sensazioni e/o preconcetti dell'osservatore)
- **INEQUIVOCABILE** (la valutazione di un osservatore deve essere comprensibile a tutti gli utilizzatori dell'osservazione)
- **RIPRODUCIBILE** (in ogni tempo e luogo la stessa osservazione dello stesso fenomeno deve produrre lo stesso risultato)

Per ottenere tale scopo occorre descrivere i fenomeni solo in termini di grandezze fisiche: entità suscettibili di valutazione quantitativa ed oggettiva, cioè di misurazione.

Misurazione: determinazione di quante volte "g" la <u>grandezza fisica</u> in esame "G" "<u>contiene</u>" una grandezza di <u>riferimento</u> "[g]" ad essa <u>omogenea</u>

G: grandezza fisica
g: misura
[g]: unità di misura

$\boxed{G = g\,[g]}$

Una grandezza viene detta grandezza fisica (g.f.) se è possibile specificare la serie di operazioni (**definizione operativa di g.f.**) che ne consente la misurazione. Pertanto nel momento in cui viene data la definizione operativa di una grandezza fisica viene anche stabilito come misurarla.

Si dicono **omogenee** quelle g.f. che hanno una stessa caratteristica misurabile: lunghezza di un righello, diametro di una circonferenza, altezza di un oggetto ...

È chiaro come per ottenere una grandezza [g] di riferimento occorrano delle convenzioni riconosciute e adottate a livello internazionale.

Definita una g.f. è possibile effettuarne la misura contando quante volte deve essere applicata l'operazione di somma $\oplus$ all'unità [g] fino ad ottenere esattamente G[1].

• Criteri di scelta per le unità di misura

Ogni grandezza fisica, per essere misurata direttamente, richiede una unità di misura (e quindi un campione di unità di misura). La scelta è illimitata e dettata solo da motivi di praticità. Analizziamo alcuni criteri generali che possono guidare nella scelta delle unità di misura.

1) Analizziamo questa identità: $1\text{ m} = 5\text{ dm} + 50\text{ cm}$

essa è formalmente corretta ma poco pratica: $1 \neq 5 + 50$

Generalizzando, se $G(C) = G(A) \oplus G(B)$

da cui $g(C)\,[C] = g(A)\,[A] + g(B)\,[B]$

generalmente si ha $g(C) \neq g(A) + g(B)$

tuttavia se [A]=[B]=[C], allora: $g(C) = g(A) + g(B)$

questo è un **primo criterio di coerenza**

In base ad esso <u>g.f. omogenee devono essere misurate utilizzando la stessa unità di misura</u> e quindi, se si adottasse questo criterio, per poter misurare tutte le g.f. ci sarebbe bisogno di una sola unità di misura per ogni gruppo di g.f. omogenee.

[1] Il simbolo $\oplus$ definisce le operazioni materiali che portano alla somma di g.f.. Per esempio la somma della lunghezza di due righelli si ottiene allineandoli e ponendo l'estremità sinistra di uno a contatto con l'estremità destra dell'altro.

2) Consideriamo la misurazione derivata della superficie di un rettangolo di area S e lati b e h

$$G(S) = G(b) \otimes G(h)$$

cioè[2]

$$g(S)\,[S] = g(b)\,[b] \times g(h)\,[h]$$

Adottando il precedente criterio di coerenza [b]=[h]=[L], si ottiene:

$$g(S)\,[S] = g(b)\,[L] \times g(h)\,[L]$$

In questo caso, anziché scegliere per la misura della superficie una nuova unità di misura, conviene scegliere $[S] = [L]^2$ così da ottenere: $g(S) = g(b) \times g(h)$

secondo criterio di coerenza: conviene <u>utilizzare per la misura di g.f. che sono funzione di altre, unità di misura espresse in termini di queste ultime</u>

Per esempio 3,6 km/h = 1 m/1 s, ma $3{,}6 \neq 1/1$: è preferibile in questo caso misurare le velocità in m/s.

Quante unità di misura sono necessarie (fondamentali) per poter misurare tutte le g.f. ?

Per studiare <u>tutti</u>[3] i fenomeni che riguardano la <u>geometria</u> avremo bisogno di poter misurare (e quindi dovremo definire le relative unità di misura e successivamente i relativi campioni di unità di misura):

lunghezza [L] **superficie** [S] **volume** [V]

Sappiamo però p.es. che l'area di un rettangolo è pari al prodotto di base per altezza e quella di un triangolo 1/2 base per altezza. Al di là del fattore numerico una superficie è pari al prodotto di due lunghezze e quindi, coerentemente, sceglieremo $[S] = [L]^2$.

Analogamente per il volume sceglieremo $[V] = [L]^3$.

Pertanto sarà sufficiente, per studiare la geometria definire una sola grandezza unitaria: le altre due possono essere ricavate a partire da questa.

Per studiare la <u>cinematica</u> dovremo poter misurare altre g.f.:

tempo [T] **frequenza** [f] **velocità** [v] **accelerazione** [a] **...** [...]

Poiché tutte le grandezze introdotte sono ricavabili l'una dall'altra ricorrendo alle loro definizioni f=1/T, v=s/t, a=v/t ... è sufficiente, sfruttando la necessità di un sistema coerente, introdurre una sola grandezza fisica unitaria.

Analogamente per studiare la <u>dinamica</u> dovremo introdurre come g.f. fondamentale solo la massa o la forza o l'energia o altre grandezze meccaniche in quanto anche queste sono collegate le une alle altre da definizioni o leggi fisiche (p.es. F= m a).

Il numero di g.f. fondamentali è pari al numero delle g.f. totali diminuite del numero di relazioni geometriche, definizioni, leggi fisiche, etc. (relazioni base) che le correlano:

$$\mathbf{N_{fond.} = N_{g.f.} - N_{rel}}$$

• Notazioni, equazioni e calcolo dimensionale

Utilizzando la notazione di Maxwell ogni g.f. può essere espressa in termini delle g.f. scelte come fondamentali; vediamo degli esempi:

- consideriamo la definizione di velocità: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{s}}{dt}$.

---

[2] Il simbolo $\otimes$ è stato introdotto in analogia con quello che definisce le operazioni materiali di somma $\oplus$.

[3] Nel campo della geometria esistono anche due quantità che a rigore non necessitano di unità di misura: l'angolo piano e l'angolo solido. Esse sono rispettivamente il rapporto fra un arco di circonferenza e il suo raggio ([L]/[L]) e il rapporto fra una porzione di superficie sferica e il quadrato del suo raggio ($[S]/[L]^2$). Per riconoscere queste due g.f. si utilizzano rispettivamente il radiante (rad) e lo steradiante (sr).

Questa relazione vettoriale corrisponde a tre relazioni scalari; esaminiamo una di queste: $v_x = \frac{dx}{dt}$ (le altre si comporteranno allo stesso modo).
Essa altri non è che il rapporto fra una lunghezza e un tempo[4] e quindi coerentemente verrà misurata utilizzando l'unità di misura [v] = [L]/[T].

Dalla relazione [v] = [L]/[T] si può ricavare immediatamente il **grado di omogeneità** delle grandezze coinvolte, infatti assumendo un'unità di lunghezza n_L volte più piccola, la misura di $\vec{v}$ resta moltiplicata per n_L; assumendo un'unità di tempo n_T volte più piccola, la misura di $\vec{v}$ resta moltiplicata per n_T; assumendo infine un'unità di massa n_M volte più piccola, la misura di $\vec{v}$ non viene alterata. Ciò si esprime dicendo che una velocità ha una omogeneità di grado 1 rispetto alla lunghezza, di grado -1 rispetto al tempo e di grado 0 rispetto alla massa.

- Altro esempio: se le g.f. fondamentali scelte fossero lunghezza [L], massa [M], tempo [T], temperatura [θ] e carica elettrica [Q], allora la forza [F] si esprimerebbe come:
$[F] = [L]^1\ [M]^1\ [T]^{-2}\ [\theta]^0\ [Q]^0$ cioè la forza avrebbe grado di omogeneità 1 con la lunghezza e la massa, -2 con il tempo e 0 con la temperatura e la carica elettrica.
Infatti la legge **F = m a** indica che la forza ha omogeneità 1 sia con la massa che con l'accelerazione. Utilizzando la relazione $a=d^2s/dt^2$ si ha $[a] = [L]^1\ [T]^{-2}$ e quindi il risultato.

Queste equazioni tra unità di misura si dicono **equazioni dimensionali**.

Grandezze fisiche omogenee hanno le stesse dimensioni e sono misurate confrontandole con la stessa unità di misura. Non è sempre vero il viceversa: grandezze di specie diversa possono risultare equidimensionate. Ne sono esempi la pressione e modulo di Young, capacità termica ed entropia, lavoro e momento di una coppia.

Oltre alle grandezze dimensionate esistono anche quelle adimensionate. Nel sistema di unità di misura che adotteremo (il Sistema Internazionale) ne sono esempi gli angoli piani e solidi, l'indice di rifrazione, i rendimenti e in generale tutte le grandezze definite dal rapporto di grandezze equidimensionate (p.es. le costanti dielettriche relative o le permeabilità magnetiche relative).

Il **calcolo dimensionale** permette di condurre un'analisi qualitativa delle varie grandezze che compaiono nello studio dei fenomeni fisici valutando la natura delle grandezze che compaiono in una relazione algebrica, differenziale, vettoriale, ecc. facendo astrazione dal numero che esprime il "valore" delle grandezze.

Condizione necessaria (ma non sufficiente) **per la validità di una formula fisica è che le dimensioni dei due membri di un'equazione, o dei vari addendi di un polinomio, siano le stesse**.

Questo tipo di calcolo è estremamente rapido da effettuare ma si rivela uno strumento assai potente per verificare (in parte) la validità dei risultati ottenuti in qualsiasi tipo di indagine fisica.
<u>Sfuggono però a questo controllo dimensionale gli errori dovuti ad errati coefficienti numerici, o a confusione tra grandezze equidimensionate, o alla presenza di grandezze adimensionate.</u>

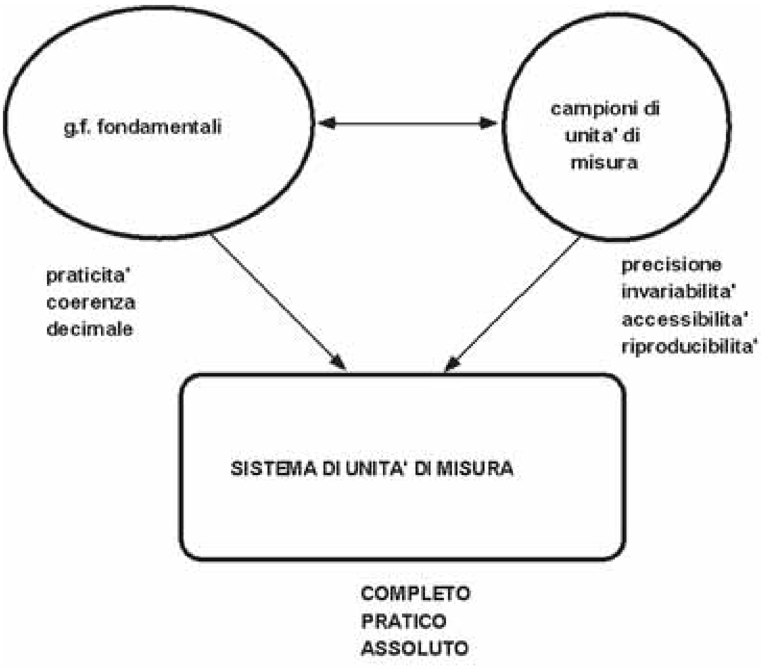
Esempi:

- $m\ddot{x} + kx = mg \ \Rightarrow\ [m\ddot{x}] = [kx] = [mg] = [F] = [M]^1 [L]^1 [t]^{-2}$: somma, sottrazione e uguaglianza sono possibili solo fra grandezze omogenee
- $V(t)=V_0 \cos(\omega t+\varphi) = V_0 \cos[\omega(t+\tau)] \rightarrow [\omega t+\varphi] = [\omega(t+\tau)]=1$ e da $[\omega]=[t]^{-1} \rightarrow [\varphi]=1$ e $[\tau]=[t]$
- Ricavare il valore di **n** nell'espressione $T=2\pi(l/g)^n$ (periodo di oscillazione di un pendolo)
- Se $T = T_0 e^{-\alpha x}$, sviluppando in serie di potenze si ha: $T_0 e^{-\alpha x} = T_0 \sum_{n=0,\infty} \frac{(-\alpha x)^n}{n!} = T_0[1 - \alpha x + \frac{(\alpha x)^2}{2} - ...]$ e quindi $[\alpha x]^n = 1 \rightarrow [\alpha x]=1 \rightarrow [\alpha]=[x]^{-1}$ (gli argomenti di funzioni trascendenti, in quanto sviluppabili in serie di potenze, sono adimensionali)

[4] Il fatto che dx e dt siano quantità infinitesime non altera la sostanza del ragionamento

SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

Prima di operare con misure sui fenomeni fisici è importante decidere quale sistema di unità di misura adottare. Infatti, a seconda della scelta, variano non solo i valori numerici dei risultati ma a volte anche la forma delle equazioni che descrivono le leggi fisiche.
Un sistema di unità di misura è caratterizzato dalle grandezze fisiche scelte come fondamentali, dalle eventuali convenzioni di coordinazione[5] e dai campioni di unità di misura.
È ispirato da criteri di praticità e deve risultare completo (deve consentire la misurazione di tutte le g.f.), assoluto (le misure non devono variare da luogo a luogo e al trascorrere del tempo).
La praticità si riflette nella scelta delle g.f. fondamentali (p.es. si preferisce la lunghezza alla superficie o al volume), nell'adozione dei criteri di coerenza e del sistema decimale per i multipli e sottomultipli.
L'assolutezza del sistema è invece garantita dalla scelta dei campioni di unità di misura che devono risultare precisi (il valore della loro misura non deve variare da una misurazione all'altra) e invariabili nel tempo e nello spazio. Anche i campioni di unità di misura devono risultare pratici e quindi devo essere o accessibili (presso le opportune istituzioni Nazionali e/o Internazionali) o riproducibili in laboratorio.



Sistema Internazionale (S.I.) - In Italia legge del 1982

Il sistema di unità di misura che oggi meglio risponde a queste esigenze è il Sistema Internazionale (SI).

Il D.P.R. 12 agosto 1982 n. 802, specificando le norme per l'attuazione della direttiva CEE n. 80/181 relativa alle unità di misura, obbliga l'uso del SI.
Anche se adotteremo il SI è bene ricordare che diversi testi, anche recenti, utilizzano sistemi di unità di misura differenti (spesso il vecchio M.K.S.A) ormai non più consentiti dalla legge.

[5] Si tratta di relazioni fra g.f. scelte convenzionalmente in alcuni settori per motivi di praticità. Per esempio porre la velocità della luce nel vuoto pari al valore adimensionato 1 semplifica i calcoli di cinematica relativistica ma impedisce la verifica dimensionale dei risultati.

DEFINIZIONI

<u>Grandezza misurabile</u> (grandezza fisica):
attributo di un fenomeno, corpo o sostanza che può essere distinto qualitativamente e determinato quantitativamente.
P.es.: lunghezza, tempo, massa, temperatura, resistenza elettrica.
Le grandezze che possono essere poste in ordine di grandezza relativo sono grandezze dello stesso tipo (omogenee); esse possono essere raggruppate per categorie:
P.es.: lavoro, calore, energia; spessore, circonferenza, lunghezza d'onda.

<u>Grandezza fondamentale</u>:
una delle grandezze che in un sistema di unità di misura sono <u>convenzionalmente</u> accettate come funzionalmente indipendenti dalle altre.
Nel SI alcune grandezze fondamentali sono lunghezza, tempo, massa, temperatura.
Per ogni grandezza fondamentale è necessario stabilire convenzionalmente un'unità di misura; ad ogni unità di misura deve corrispondere un campione di unità.

<u>Grandezza derivata</u>:
grandezza definita in un sistema di unità come funzione delle grandezze fondamentali di quel sistema.
P.es. nel SI la velocità è una grandezza derivata da lunghezza e tempo.

<u>Dimensione di una grandezza</u>:
espressione che rappresenta una grandezza di un sistema di unità come prodotto di potenze di fattori (detti dimensioni) che rappresentano le grandezze fondamentali di quel sistema.
P.es. nel SI la dimensione della forza è $[L][M][T]^{-2}$ e $[L]^2[M][T]^{-2}$ è la dimensione dell'energia, del calore, del momento di una forza.
Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché una relazione fra grandezze fisiche sia corretta è che le dimensioni delle grandezze unite dalla relazione di uguaglianza o dalle operazioni di somma o sottrazione siano le stesse:
p.es.: $E = m\,g\,h + 1/2\,m\,v^2$; i 3 termini hanno le dimensioni $[L]^2[M][T]^{-2}$.
Gli argomenti di funzioni sviluppabili in serie di potenze (p.es. e^x, sin(x), log(x), sinh(x), ...) hanno sempre dimensione 1.

<u>Grandezza di dimensione 1</u> (adimensionale, numero puro):
per esempio: angolo piano, angolo solido, indice di rifrazione, costante dielettrica relativa, numero di Mach.

<u>Unità di misura</u>:
quantità particolare che <u>convenzionalmente</u> è stata adottata come la quantità alla quale vanno comparate le altre grandezze dello stesso tipo per esprimerne la grandezza relativa.

<u>Simbolo di una unità di misura</u>:
segno convenzionale che designa una unità di misura; p.es.: m per metro, K per kelvin, A per ampere, V per volt, W per watt.
I nomi di tutte le unità di misura sono nomi comuni privi di accento e vanno scritti con l'iniziale minuscola; sono invariabili al plurale con l'eccezione di: metro, chilogrammo, secondo, candela, mole, radiante e steradiante.
I simboli delle unità vanno scritti con la maiuscola quando il nome dell'unità è derivato da un nome proprio; minuscola negli altri casi.

Quando l'unità di misura non è accompagnata dal valore numerico deve essere scritta per esteso e non con il simbolo.
Indipendentemente dal testo in cui sono inseriti, i simboli vanno scritti in caratteri verticali lasciando uno spazio fra il valore e l'unità (p.es. 5,4 mA e non 5,4mA o *5,4 mA*); non devono mai essere seguiti dal punto di abbreviazione.

Sistema di unità di misura:
insieme di unità fondamentali e unità derivate definito seguendo le regole assegnate per un sistema di grandezze assegnato; per esempio: c.g.s., M.K.S.A., S.I.
Un sistema di unità è coerente se tutte le unità derivate sono coerenti; cioè sono espresse come prodotto di potenze di unità fondamentali.
P.es:1 Hz = 1 s^{-1}; 1 N = 1 kg m s^{-2}; 1 Pa = 1 kg m^{-1} s^{-2}; 1 J = 1 kg m^2 s^{-2}

Campione (di unità di misura):
materiale o sistema di misura destinato a definire, realizzare, conservare o riprodurre una unità di grandezza per servire da riferimento.
Non appena la tecnologia consente di utilizzare un fenomeno in modo più stabile e riproducibile che in precedenza, si cerca di utilizzarlo per definire un nuovo campione di unità di misura (per un nuovo sistema di unità di misura). Il suo valore, per ovvi motivi di praticità, non dovrà discostarsi dalla vecchia unità di misura per più della sua riproducibilità.

Campione (primario e secondario):
il campione (primario) è designato o largamente accettato come avente le più alte qualità metrologiche; il suo valore è stabilito senza riferimento ad altri campioni della stessa specie; può riferirsi indifferentemente a grandezze fondamentali o derivate.
Il campione secondario è un campione il cui valore è determinato per confronto col campione primario della stessa grandezza.

Tracciabilità:
proprietà di un campione o del risultato di una misura di essere rapportabile ai campioni locali, nazionali o internazionali mediante una catena ininterrotta di confronti effettuati con incertezze determinate.
I campioni secondari e/o quelli ottenuti a partire da questi ultimi non hanno lo stesso grado di riproducibilità del campione primario: si pensi al campione di lunghezza che da un lato richiede un orologio atomico per sfruttare la definizione di "metro campione" e dall'altro, per poter essere utilizzato, p.es. per la graduazione di un regolo, deve consentire la segnatura di due tacche a distanza di un metro ed è quindi soggetto a dilatazioni termiche, vibrazioni, problemi di planarità, etc. I campioni primari vengono utilizzati rarissimamente: la quasi totalità delle misurazioni tecniche e scientifiche non richiede quella riproducibilità garantita solo dal campione primario.

Sistema Internazionale di unità di misura SI: norma CNR-UNI 10003

sistema coerente basato su 7 unità fondamentali:

grandezza [simbolo[6]]	**Unità**	**simbolo dell'unità**
lunghezza [L]	metro	m
massa [M]	chilogrammo	kg
tempo [T]	secondo	s
corrente elettrica [I]	ampere	A
temperatura termodinamica [θ]	kelvin	K
quantità di sostanza	mole	mol
intensità luminosa	candela	cd

Campioni delle unità di misura del SI[7]:

lunghezza: metro (m)
Lunghezza del tragitto compiuto dalla luce nel vuoto in un intervallo di 1/299 792 458 di secondo

Prima dell'attuale definizione (XVII Conferenza Generale Pesi e Misure –1983) che è parte integrante del S.I. il metro ha avuto le seguenti definizioni:

- **quarantamilionesima parte del meridiano terrestre** (più precisamente la decimilionesima parte della distanza fra il polo della Terra e l'equatore lungo il meridiano passante per Parigi) - la definizione di Laplace-Lagrange risale al 1791)
- **distanza fra due incisioni su di una sbarra di platino-iridio** (conservata nel Bureau International des Poids et Mesures a Sèvres, presso Parigi). La definizione, adottata nel settembre 1889 dalla Prima Conferenza Internazionale di Pesi e Misure, scaturì dalla necessità di fare riferimento a campioni concreti. La riproducibilità di questo campione era di 0,2 μm/m = 2×10^{-7}
- **lunghezza pari a 1 650 763,73 lunghezze d'onda nel vuoto della riga rosso-arancio del kripton 86.** La definizione (XI CGPM - 1960) è parte integrante del vecchio sistema M.K.S.A (La riproducibilità di questo campione era di 1 nm/m = 10^{-9})

La definizione del metro campione di lunghezza si basa sulla costanza della velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto. Nel S.I. tale velocità è per definizione c = 299 792 458 m/s. La riproducibilità del campione di lunghezza coincide, quindi, con quella del campione del secondo $\Delta L/(L_{metro}) = \Delta T/(T_{secondo}) = 10^{-12}$

massa: chilogrammo (kg)
Massa del prototipo internazionale conservato al Pavillon de Breteuil (Sèvres - Francia)

La definizione (III CGPM – 1901) si riferisce a un cilindro di platino – iridio (90%-10%) alto circa 39 mm e di diametro circa 39 mm. Per il suo utilizzo (confronto con prototipi di campioni

[6] Per i simboli delle grandezze fisiche non esiste una convenzione; siete liberi di scegliere la notazione che preferite facendo però molta attenzione: ad esempio con [L] si può indicare una lunghezza ma anche lavoro, momento angolare, induttanza ...

[7] Chi fosse interessato agli aspetti metrologici delle misure dovrà tenere conto del continuo aggiornamento delle definizioni e dei campioni di unità di misura: alcune delle definizioni riportate potrebbero essere già state modificate

secondari) viene impiegata una bilancia (della portata di un chilogrammo) sensibile ai 10 μg che garantisce una riproducibilità $\Delta M/(M_{chilogrammo})$ = 10 μg/1 kg = 10^{-8}.
Quello di massa è il campione di unità di misura del S.I. più antico. Si attende una minore incertezza nella determinazione del numero di Avogadro (N = 6,022 045 x 10^{23} mol^{-1}) per definire un nuovo campione di massa.

tempo: secondo (s)
Durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo del cesio 133

Prima dell'attuale definizione del secondo (XIII CGPM – 1967) le precedenti si basavano sulla periodicità del moto terrestre:

- **86400-esima parte del giorno solare medio**, cioè della media sulla base di un anno del **giorno solare**, inteso come intervallo di tempo che intercorre tra due successivi passaggi del Sole sullo stesso meridiano (86 400 = 24 ore/giorno x 60 min/ora x 60 s/min)
- **secondo dell’effemeride** è 1/31 556 925,974 dell’**anno tropico 1900** (intervallo di tempo fra due **equinozi di primavera**).

Le due unità di misura del secondo erano coincidenti nel 1900, ma ora non lo sono più, a causa delle anomalie nella velocità di rotazione della Terra.
Successivamente la definizione si basò sull’**orologio ad ammoniaca** che sfrutta la costanza della frequenza delle vibrazioni dell’atomo[8] di azoto rispetto al piano degli atomi di idrogeno (23,87 GHz).

La riproducibilità del campione di secondo è $\Delta T/(T_{secondo}) = 10^{-12}$.

temperatura termodinamica: kelvin (K)
Frazione 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua

(XIII CGPM – 1967)
Il punto termodinamico dove coesistono le tre fasi solida, liquida e gassosa dell'acqua è alla temperatura di –0,01 °C e alla pressione di 4,58 mm_{Hg}.
Con questa definizione l'acqua distillata solidifica, alla pressione atmosferica, a 0,01 K.
La riproducibilità del campione è $\Delta\theta/(\theta_{kelvin})$ = 2 x 10^{-7}.

intensità di corrente: ampere (A)
Intensità di una corrente elettrica costante che, percorrendo due conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile, posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro nel vuoto, produrrebbe fra questi conduttori una forza pari a 2x10^{-7} N su ogni metro di lunghezza

(IX CGPM- 1948)
La definizione è astratta. Con le opportune precauzioni è tuttavia possibile approssimare sufficientemente le richieste di conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita e sezione nulla della definizione: il campione è riproducibile a $\Delta I/(I_{ampere})$ = 4 x 10^{-6}. Per altre grandezze elettriche (non fondamentali) sono disponibili campioni più riproducibili.

[8] Per questo motivo questi strumenti vengono detti orologi atomici: il loro periodo di oscillazione è legato ad una particolare vibrazione di un sistema atomico.

quantità di materia: mole (mol)

Quantità di materia di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0,012 kg di carbonio 12. Le entità elementari debbono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, altre particelle, ovvero gruppi specificati di tali particelle

(XIV CGPM – 1971)

intensità luminosa: candela (cd)

Intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540 x 10^{12} Hz e la cui intensità energetica in tale direzione è 1/683W/sr

(XVI CGPM – 1979)
La frequenza di 540 THz corrisponde, nel vuoto, alla lunghezza d'onda λ = 555 nm (colore giallo) che è al massimo della sensibilità spettrale dell'occhio umano.

Unità derivate:

alcune unità derivate hanno nomi e simboli speciali; ad esempio:

grandezza derivata	unità di misura	simbolo	equivalenza
angolo piano	radiante	rad	1 rad = 1 m/m
angolo solido	steradiante	sr	1 sr = 1 m^2/m^2
frequenza	hertz	Hz	1 Hz = 1/s
forza	newton	N	1 N = 1 kg m/s^2
pressione	pascal	Pa	1 Pa = 1 N/m^2
energia, lavoro, calore	joule[9]	J	1 J = 1 N m
potenza	watt	W	1 W = 1 J/s
carica elettrica	coulomb	C	1 C = 1 A s
potenziale, f.e.m.	volt	V	1 V = 1 J/C
resistenza elettrica	ohm	Ω	1 Ω = 1 V/A
flusso magnetico	weber	Wb	1 Wb= 1 V s
induzione magnetica	tesla	T	1 T = 1 Wb/m^2
capacità elettrica	farad	F	1 F = 1 C/V
induttanza	henry	H	1 H = 1 Wb/A
flusso luminoso	lumen	lm	1 lm = 1 cd sr
illuminamento	lux	lx	1 lx = 1 lm/m^2

Prefissi per indicare multipli e sottomultipli:

femto	f	10^{-15}	peta	P	10^{+15}
pico	p	10^{-12}	tera	T	10^{+12}
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^{+9}
micro	µ	10^{-6}	mega	M	10^{+6}
milli	m	10^{-3}	chilo	k	10^{+3}

[9] Si raccomanda la pronuncia "giul"

Notazioni:
Seguendo lo stile dei documenti I.S.O. **per marcare la parte decimale di un numero viene utilizzata la virgola e non il punto**.
Non può essere usato più di un prefisso.
Per le misure di massa i multipli e sottomultipli vanno riferiti al grammo e non al chilogrammo: mg per milligrammo e non µkg.
Occorre prestare attenzione nei casi in cui un prefisso può essere confuso con una unità; ad esempio: mK = millikelvin; Km = kelvin x metro; km = chilometro; MK= megakelvin.
È opportuno scegliere i prefissi in modo da ottenere valori compresi fra 0,1 e 1 000.
In una tabella va usato un solo prefisso per colonna anche se i valori escono dall'intervallo compreso fra 0,1 e 1 000.

Unità non SI:

minuto (min) ora (h) giorno (d)
1 miglio nautico internazionale = 1 852 m
1 miglionautico/h = 1 knot = 0,514 444 m/s   1 km/h = 1/3,6 m/s
1 bar = 10^5 Pa
1 kWh = 3,6 MJ
1 Ah = 3,6 kC
1 t (tonnellata) = 1 000 kg

Unità non SI da evitare (anche se ancora di uso comune)

1" (1 inch) = 25,4 mm   1 ft = 12" = 0,304 8 m   1 yd = 3 ft = 0,914 4 m
1 kg_f (chilogrammo forza) = 1 kg_p (chilogrammo peso) = 9,806 65 N
1 atm (atmosfera standard) = 101,325 kPa = 1,013 25 bar
1 at (atmosfera tecnica) = 98,066 5 kPa = 0,980 665 bar
1 mmHg = 1 Torr = 1,333 22 mbar = 133,322 Pa
1 cal = 4,186 8 J   1 Cal = 4,186 8 kJ
1 HP = 735,498 75 W   1 CV = 75 kgm/s   1 kgm/s = 9,806 65 W

TEORIA DELLA MISURA

Illustriamo alcuni concetti della teoria della misura con **un esempio**[10].

Si supponga di voler determinare la profondità di un pozzo gettando in esso un sasso[11].
Per ottenere una misura diretta della profondità dovremmo eseguire una serie di operazioni che porti al confronto di questa grandezza con l'unità di misura ad essa omogenea[12]. Alternativamente si può pensare a una misura derivata in cui si misura il tempo impiegato dal sasso per giungere in fondo al pozzo.

Seguiamo questa seconda strada: possiamo misurare con un cronometro[13] il tempo necessario affinché il sasso, lasciato cadere dall'imboccatura del pozzo, raggiunga il fondo. A questo punto abbiamo bisogno di una relazione fra la profondità del pozzo e il tempo impiegato dal sasso per raggiungerne il fondo. Questa relazione deve essere nota con almeno la stessa accuratezza che richiediamo alla nostra misura.

Dobbiamo quindi creare un modello della realtà, analizzarlo dal punto di vista delle leggi fisiche e infine tradurlo in relazioni matematiche.
Una prima schematizzazione potrebbe consistere nel considerare la caduta del sasso come se avvenisse nel vuoto. In questo caso dall'equazione del moto si otterrebbe:

$$h = \tfrac{1}{2} g\, t^2 \qquad (1)$$

in cui "h" rappresenta la profondità incognita del pozzo, "$g = 9{,}8\ m/s^2$" l'accelerazione di gravità e "t" il tempo misurato direttamente con un cronometro.

La misurazione si svolgerebbe nel seguente modo[14]: il misuratore lascia cadere il sasso mentre fa partire il cronometro; quando sente il tonfo del sasso nell'acqua arresta il cronometro; l'indicazione del cronometro rappresenterà il tempo "t" da introdurre nella relazione (1).

Ci aspettiamo di trovare un solo valore[15] dal quale ricavare esattamente la profondità cercata? Se ripetessimo più volte la misurazione otterremmo una serie di misure di tempo simili tra loro ma non coincidenti. Ciò può essere dovuto a diversi motivi:
- non perfetto sincronismo fra il momento del rilascio del sasso e l'inizio del conteggio da parte del cronometro dovuto al ritardo dei riflessi del misuratore
- non perfetto sincronismo fra il momento in cui viene percepito il tonfo del sasso e l'istante in cui viene arrestato il cronometro
- velocità iniziale del sasso non nulla.

Questo tipo di cause porta a valori diversi fra una misura e la successiva; esse producono effetti di piccola entità che però non sono né riproducibili, né prevedibili perché variano casualmente. Vengono chiamate **errori casuali**.

---

[10] L'esempio ha validità didattica; all'interno di questo corso la fase preparatoria delle misurazioni da svolgere in laboratorio non viene delegata allo studente. È però istruttivo e consigliato provare ad immaginare alcuni esempi di misurazione ed analizzarli nei termini descritti in queste note

[11] La profondità del pozzo è il **misurando.** Stiamo definendo il **metodo di misurazione**: lanciamo un sasso (misura derivata) anziché adoperare un regolo (misura diretta)

[12] Dovendo adottare il Sistema Internazionale, l'unità di misura della profondità (omogenea ad una lunghezza) è il metro. Ovviamente non ricorreremmo al confronto diretto col campione (cosa peraltro impossibile poiché in questo caso si tratta di una definizione) ma con un regolo che riporti delle incisioni (tacche) la cui distanza è determinata a partire dalla definizione del campione primario o più realisticamente da un campione secondario.

[13] Il funzionamento del cronometro si basa su un oscillatore il cui periodo è in relazione nota con il campione di unità di misura del tempo.

[14] Stiamo definendo la **procedura di misurazione**

[15] Tale valore è detto **valore vero**. Poiché la definizione del misurando non può essere infinitamente precisa, possono esistere più valori veri.

Gli errori[16] sono la differenza fra il risultato di una misura e il valore vero cercato.

Per eliminare questa non riproducibilità si può agire in tre direzioni a seconda del risultato che si vuole ottenere:
- se non è importante distinguere, p.es., fra una profondità di 10 metri e una di 11 metri si può utilizzare un cronometro in grado di apprezzare solo i decimi di secondo. La scarsa sensibilità dello strumento maschererà l'effetto degli errori casuali
- se è possibile eseguire molte misure nelle stesse condizioni si possono utilizzare metodi statistici[17] per ridurre l'effetto degli errori casuali
- se si possono effettuare solo poche misurazioni, o al limite una sola, è necessario cambiare strumentazione[18], p.es. si può utilizzare un cronometro elettronico attivato dallo sblocco di un elettromagnete che lascia cadere il sasso con velocità nulla e si arresta quando il suono del tonfo arriva a un microfono.

È però illusorio pensare di poter eliminare del tutto gli errori casuali modificando la strumentazione: il cronometro, per quanto sensibile, non sarà mai in grado di apprezzare intervalli temporali inferiori al periodo del suo oscillatore interno, i dispositivi elettromeccanici risentono delle vibrazioni, la smagnetizzazione non è istantanea, i dispositivi elettronici sono disturbati dai campi elettromagnetici , etc.

La presenza degli errori casuali viene facilmente evidenziata ripetendo più volte la misurazione nelle stesse condizioni: se la sensibilità della strumentazione lo consente, si otterranno valori non coincidenti fra loro; lo scarto fra i valori delle varie misure è indice dell'entità degli errori casuali presenti nella misurazione.

Esiste però un'altra serie di cause che possono alterare il risultato della misura e produrre valori che si discostano da quello teorico:
- la formula (1) non considera l'attrito con l'aria
- non si tiene conto della velocità finita della propagazione del suono
- il cronometro può anticipare o ritardare

Le prime due cause conducono a misure di tempo superiori a quelle che si otterrebbero se la (1) descrivesse correttamente il fenomeno; la terza produrrebbe risultati maggiori o minori di quelli corretti a seconda della disfunzione dello strumento. Queste cause appartengono però a una categoria diversa da quella degli errori casuali: l'entità e il verso della variazione rimangono inalterati fra una misura e la successiva; si parla in questo caso di **errori sistematici**.

Contrariamente agli errori casuali quelli sistematici, una volta individuati, possono, almeno in linea teorica, essere eliminati cambiando la strumentazione e/o il metodo di misura se questo altera i risultati delle misure o apportando correzioni numeriche al risultato ottenuto.

Purtroppo non sono di facile individuazione proprio perché non si evidenziano ripetendo la misurazione nelle stesse condizioni. In questo caso per rivelarne la presenza occorre o studiare più a fondo il fenomeno per averne un modello e quindi una rappresentazione matematica più accurata, oppure si deve ripetere la misurazione in condizioni diverse, p.es. cambiando lo sperimentatore o la strumentazione o il principio fisico sul quale si basa la misura, etc.

[16] Nel campo della teoria della misura la parola "errore" non ha una connotazione negativa non essendo sinonimo, ad esempio, di "sbaglio".

[17] Il più noto consiste nel calcolare la media aritmetica della serie di risultati: i valori in eccesso tenderanno a compensarsi con quelli in difetto riducendo l'effetto degli errori casuali. Nel seguito del corso approfondiremo questa metodologia

[18] In questo caso variano anche la definizione del misurando, il metodo di misurazione e la procedura della misurazione

Non si deve pensare che la distinzione fra errori casuali ed errori sistematici sia così netta. Ad esempio nell'azionare il cronometro in corrispondenza del verificarsi di un qualche evento, a causa della lentezza dei nostri riflessi, l'azione avverrà sempre in ritardo (errore sistematico) ma varierà anche leggermente da una prova alla successiva (errore casuale).

Data l'impossibilità di conoscere i valori veri (occorrerebbe effettuare delle misure senza errore ...) il concetto di errore è qualitativo; nell'elaborazione dei risultati di misurazioni si ricorrerà alle incertezze, quantità statistiche descrivibili in modo oggettivo.

DEFINIZIONI

Il *Comité International des Poids et Mesures* (**CIPM**), la più alta autorità mondiale in metrologia ha chiesto al *Bureau International des Poids et Mesures* (**BIPM**) di produrre una procedura accettata a livello internazionale per esprimere l'incertezza delle misure[19].

Tale compito è stato istruito dall'*International Organization for Standardization* (**ISO**) che meglio rappresenta le necessità delle industrie e del commercio e dalle organizzazioni che partecipano ai lavori dell'ISO: l'*International Electrotechnical Commission* (**IEC**) partner dell'ISO nella standardizzazione mondiale; il CIPM e l'*Organisation Internationale de Metrologie Légale* (**OIML**) organizzazioni mondiali nella metrologia; l'*International Union of Pure and Applied Chemistry* (**IUPAC**), l'*International Union of Pure and Applied Physics* (**IUPAP**) e l'*International Federation of Clinical Chemistry* (**IFCC**).

Seguono alcune note e definizioni, ricavate in gran parte dalle norme DIN, che sono state adattate ai contenuti del corso.

MISURAZIONE E MISURA

Misurazione:

insieme di operazioni che portano alla determinazione del valore del **misurando**, cioè il valore della grandezza fisica da misurare. Una misurazione inizia quindi con la specificazione appropriata del misurando, del **metodo di misurazione** e della **procedura di misurazione**.

Misura:

valore del misurando ottenuto in seguito a una misurazione. Essa è espressa come una unità di misura moltiplicata per un numero:
p.es. : lunghezza di una sbarra: 5,34 m; massa di un corpo: 0,152 kg; quantità di sostanza di un campione di acqua: 0,012 mol
I valori possono essere positivi, negativi o zero.

[19] Così come l'uso dell'*International System of Units* (**SI**) ha portato alla coerenza in tutte le misurazioni tecniche e scientifiche, in quest'epoca di mercato globale occorre un consenso mondiale sulla valutazione ed espressione dell'incertezza affinché sia possibile confrontare misure effettuate in nazioni diverse.

I valori di grandezze di dimensione 1 sono generalmente espressi come numeri puri (p.es. un'eccezione: 0,17 sr).

L'unità di misura deve essere sempre espressa in quanto parte integrante della misura.

Definizione del misurando:

il misurando deve essere definito con sufficiente completezza, rispetto all'accuratezza richiesta, affinché per tutti gli scopi pratici il valore associato con la sua misurazione sia unico.
Se, come esempio, la lunghezza di una sbarra di acciaio lunga nominalmente 1 m deve essere determinata con l'accuratezza di 1 µm, occorre che vengano specificate sia la temperatura che la pressione; se l'accuratezza richiesta è 1 mm non è necessario esprimere tali condizioni di misura.

Valore vero:

valore consistente con la definizione di una particolare grandezza data.
Questo è il valore si otterrebbe da una misurazione perfetta; pertanto i valori veri non sono determinabili.
Possono esserci più valori veri consistenti con una particolare definizione se questa non è sufficientemente dettagliata rispetto all'accuratezza della misurazione.

Metodo di misurazione:

può essere diretto se il valore del misurando è ottenuto mediante l'uso di uno strumento atto alla misurazione della grandezza fisica del misurando; è indiretto se il risultato è espresso in termini dei valori di altre grandezze essendo nota la relazione fra queste e il misurando.
Molti fenomeni fisici possono essere utilizzati in una misurazione; p.es. per misurare lunghezze si possono utilizzare: interferenza luminosa, variazione di capacità elettrica; per temperature: la dilatazione termica, l'effetto termoelettrico, la variazione di resistenza elettrica; per la forza: la deformazione elastica, l'accelerazione; per l'intensità di corrente: l'effetto Joule, effetti elettromagnetici.

Risultato di una misurazione:

valore attribuito al misurando in seguito a una misurazione. Esso è solo un'approssimazione o stima del valore del misurando ed è quindi completo solo quando venga accompagnato dall'incertezza di quella stima.
Riportando il risultato di una misurazione deve essere chiaro se è stata o meno effettuata una correzione per errori sistematici e se è stata eseguita una media aritmetica di più valori.
In molti casi il risultato di una misurazione è determinato da una serie di osservazioni ottenute in condizioni di ripetibilità. Eventuali variazioni dei risultati di osservazioni ripetute vengono attribuite al fatto che sono variate le grandezze influenti.

ERRORI, EFFETTI E CORREZIONI[20]

Errori di misura e loro cause:

L'errore è il risultato di una misurazione meno un valore vero del misurando. Esso è un concetto idealizzato perché gli errori non possono essere conosciuti esattamente in quanto non sono noti i valori veri; in pratica si usa al suo posto un valore convenzionale che è la stima dell'incertezza.

Ogni valore misurato è influenzato da imperfezioni dello strumento, del metodo di misura, dell'oggetto cui appartiene il misurando, dell'ambiente e dell'osservatore; queste influenze possono anche variare nel tempo. Infine ci possono essere sbagli commessi dall'osservatore inesperto che si supporranno inesistenti (ma gli studenti sono per definizione degli inesperti in questo campo a meno che non abbiano precedentemente acquisito esperienza nel campo delle misurazioni).

Esistono molte cause possibili dell'errore di una misurazione:
- definizione incompleta del misurando
- realizzazione imperfetta della definizione del misurando
- insieme di dati misurati non rappresentativo del misurando
- conoscenza inadeguata delle condizioni ambientali o dei loro effetti sulla misurazione
- valutazione soggettiva nella lettura di strumenti analogici
- risoluzione della strumentazione insufficiente
- valori inesatti delle costanti e dei parametri ottenuti da sorgenti esterne
- assunzioni ed approssimazioni utilizzate
- variazioni delle osservazioni ripetute non identificate

L'errore viene scomposto in una componente casuale e una sistematica.

Errori casuali

L'errore casuale è pari all'errore meno l'errore sistematico. Il suo valore non può essere conosciuto esattamente perché non è noto il valore vero.
Gli errori casuali provengono da impredicibili variazioni temporali e spaziali delle grandezze influenti. Sebbene non sia possibile compensare completamente gli errori causali, il loro effetto può essere ridotto aumentando il numero di osservazioni e calcolando la media aritmetica di un numero sufficientemente elevato di misure: l'errore casuale è il risultato di una misurazione meno la media che si potrebbe ottenere da un numero infinito di misurazione del misurando sotto condizioni di ripetibilità.

La deviazione standard sperimentale della media aritmetica di una serie di misurazioni non è l'errore casuale della media ma una misura dell'incertezza della media dovuta ad effetti casuali.

[20] Il concetto di incertezza come attributo quantificabile è stato introdotto recentemente anche se la teoria degli errori è stata a lungo parte della teoria e pratica della misura. Oggi è accettato il fatto che **quando tutte le componenti note o sospette dell'errore siano state valutate e corrette, rimanga sempre un'incertezza circa la correttezza del risultato ottenuto.**

Errori sistematici

L'errore sistematico è pari all'errore meno l'errore casuale. Il suo valore non può essere conosciuto esattamente perché non è noto il valore vero.

Gli errori sistematici producono variazioni di verso e entità costanti al ripetersi delle misurazioni; non possono essere eliminati ma spesso possono essere ridotti: se viene identificato un effetto sistematico esso può essere quantificato e, se esso è significativo per l'accuratezza richiesta, si può applicare una correzione numerica per compensarne l'effetto o procedere con un nuova misurazione in condizioni di non riproducibilità.

L'errore sistematico è la <u>media</u> che si potrebbe ottenere da un numero infinito di misurazioni del misurando sotto condizioni di ripetibilità meno il valore vero del misurando. L'errore sistematico può essere evidenziato se non si osservano condizioni di riproducibilità.

Si assume che il risultato di una misurazione sia stato corretto per tutti gli effetti sistematici significativi noti e che sia stato compiuto ogni sforzo per identificarli e che, dopo la correzione, il valore atteso dell'effetto sistematico corretto sia nullo.
Dopo la correzione degli effetti sistematici, il risultato di una misurazione è tuttavia solo una stima del valore del misurando.

Correzione/fattore correttivo

valore che va sommato algebricamente/moltiplicato per il risultato per compensare l'errore sistematico; la compensazione non può essere completa in quanto non è noto l'errore.

Condizioni di ripetibilità:

esistono quando lo stesso osservatore effettua misure della stessa grandezza fisica usando lo stesso metodo di misura e gli stessi strumenti nelle stesse condizioni ed in un breve intervallo di tempo.
Le variazioni di osservazioni ripetute vengono attribuite al fatto che sono variate grandezze influenti.

Grandezza influente:

grandezza diversa dal misurando che influisce sul risultato di una misurazione; p.es.: la temperatura di un micrometro o la frequenza di una tensione alternata.

Condizioni di riproducibilità:

possono esistere quando diversi osservatori eseguono misure di una stessa grandezza fisica (opportunamente definita) utilizzando lo stesso metodo di misura ma strumenti diversi e in luoghi e tempi diversi. Il confronto dei risultati ottenuti sotto condizione di riproducibilità può evidenziare la presenza di effetti sistematici non determinabili da ciascun osservatore separatamente.

INCERTEZZA

> ***Riportando il risultato di una misura è obbligatorio fornire qualche indicazione quantitativa della qualità del risultato affinché i suoi utilizzatori possano stabilirne l'affidabilità.***
> ***Senza tale indicazione i risultati delle misure non possono essere confrontati né fra di loro né con valori di riferimento.***

Errore e incertezza non sono sinonimi ma due concetti diversi: il primo è qualitativo perché si basa sul valore vero che non è noto; il secondo è quantitativo perché si basa sui valori dei risultati delle misurazioni.

Quando tutte le componenti note o sospette dell'errore siano state valutate e corrette, rimane sempre un'incertezza circa la correttezza del risultato ottenuto.
L'incertezza comprende in generale diverse componenti; alcune possono essere valutate statisticamente (incertezze di tipo A); altre vengono valutate assumendo distribuzioni di probabilità assunte sulla base dell'esperienza o di altre informazioni (incertezze di tipo B).
Le componenti della categoria A) sono caratterizzate dalle stime delle varianze σ^2 o delle deviazioni standard σ e dal numero di gradi di libertà ν.
Le componenti della categoria B) devono essere caratterizzate da quantità che possono essere considerate approssimazioni delle corrispondenti varianze (la cui esistenza è assunta); analogamente per le approssimazioni delle deviazioni standard.

L'incertezza viene generalmente espressa dal parametro statistico deviazione standard (o un suo multiplo).
L'incertezza standard del risultato di una misurazione derivata ottenuto dai valori di altre grandezze è detta **incertezza standard combinata**. La corrispondente deviazione standard stimata è pari alla radice quadrata della varianza combinata ottenuta dalle varianze delle varie componenti (legge di propagazione delle incertezze).

Una scienza è esatta nel limite in cui riesce a determinare l'incertezza dei suoi risultati

STRUMENTI DI MISURA

Strumenti tarati

Gli strumenti conservano, mediante l’operazione di taratura effettuata dal costruttore, copia del campione dell’unità di misura. Si pensi ad un righello: una volta realizzata (in un ufficio metrologico) una copia del campione di unità di misura di lunghezza, con questo vengono tarate nuove copie e così via: le copie vengono diffuse per generare copie successive. Ad ogni passaggio la qualità metrologica del campione si degrada per via degli errori di misura fino ad arrivare a quello utilizzato per la costruzione del righello. La divisione di 1 cm del righello “ricorda” in questo modo 1/100 della distanza fra le due tacche della prima copia di campione di metro realizzata.
Analogamente per gli altri strumenti. E’ interessante notare come la misura del tempo richieda per questo processo di memorizzazione l’uso di un sistema in grado di oscillare a frequenza fissa: il pendolo meccanico (una volta sostituito da una massa rotante - il bilanciere - collegata ad una molla elicoidale) o nella strumentazione elettronica un circuito oscillante che vibra alla frequenza determinata dalle caratteristiche elastiche di una lamina piezoelettrica di quarzo). E la bilancia o il termometro come vengono tarati[21]?

Scala degli strumenti analogici

Gli strumenti di misura analogici possono avere una o più scale.
- Indice: parte mobile di un dispositivo indicatore la cui posizione, rispetto a tacche di riferimento, permette di determinare il valore indicato (p.es.: ago, punto luminoso, superficie di un liquido).
- Scala: insieme ordinato di tacche (con una numerazione associata) che forma parte del dispositivo indicatore di uno strumento di misura.
- Divisione: parte della scala compresa fra due tacche consecutive.
- Valore di una divisione: distanza fra due tacche misurata nelle unità riportate sulla scala.
- Scala lineare/non lineare: scala in cui il rapporto fra la lunghezza (p.es. in cm) e il valore di ciascuna divisione è/non è costante per tutta la scala. Una scala non lineare può essere ad esempio: logaritmica, quadratica, parabolica, iperbolica (ohmmetro).
- Scala a zero soppresso: scala in cui l'intervallo ricoperto dalla scala non include lo zero (p.es.: il termometro clinico).
- Scala a zero centrale: scala in grado di presentare valori sia positivi che negativi

Sensibilità

Una delle principali caratteristiche distintive di uno strumento di misura è la sua **sensibilità**.
Essa è definita come rapporto fra la variazione dell'indicazione e la variazione della sollecitazione in ingresso che l’ha provocata. Se invece lo strumento di misura ha un indicatore digitale la sensibilità è definita come il rapporto fra il numero di incrementi digitali e la variazione del misurando che l'ha provocata (dove la variazione minima è detta digit).
Al variare della sollecitazione la sensibilità può essere costante, se la funzione di trasferimento è lineare (p.es. voltmetro, oscilloscopio), o variare in funzione della sollecitazione (p.es. : ohmmetro).
Più lo strumento è sensibile e più piccola è la variazione della grandezza di ingresso che produce una variazione dell’uscita pari a una divisione della scala.

Precisione

La capacità di uno strumento di fornire indicazioni similari sotto condizioni di ripetibilità della misurazione della stessa grandezza è detta precisione.
In generale l'indicazione di uno strumento è funzione non solo della grandezza da misurare ma anche di altre quantità (disturbi) che influenzano il risultato variandolo in modo impredicibile (si tratta di errori casuali). Tanto più lo strumento è esente da questi effetti tanto più è preciso.

[21] A questo punto dovreste aver e la curiosità per navigare un poco, per esempio dalle parti di wikipedia, per vedere il “come funziona” di altri strumenti. Provate ad esplorare anche i siti degli istituti di metrologia.

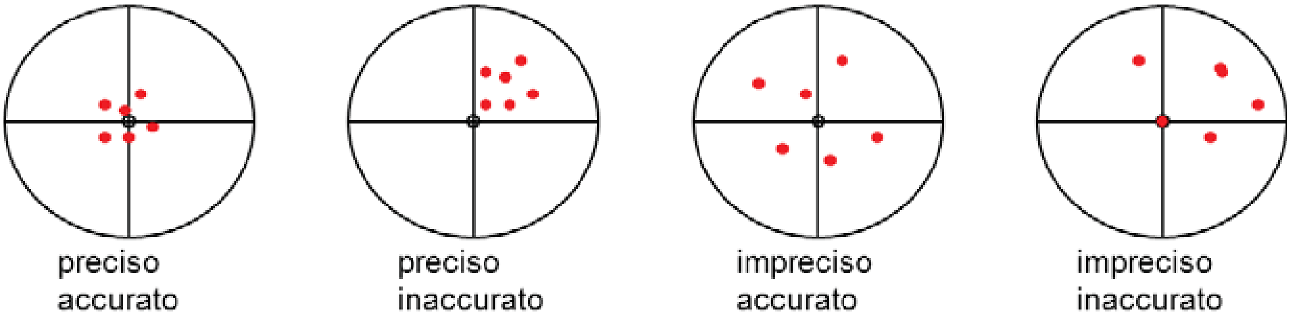
La precisione e la sensibilità dello strumento sono due caratteristiche antitetiche: uno strumento molto sensibile riesce a percepire piccole variazioni della grandezza di ingresso ed è quindi sensibile anche alle cause di errore; uno strumento molto preciso non sarà sensibile a questi fattori casuali e quindi sarà tipicamente poco sensibile anche alle variazioni dell’ingresso.

Accuratezza

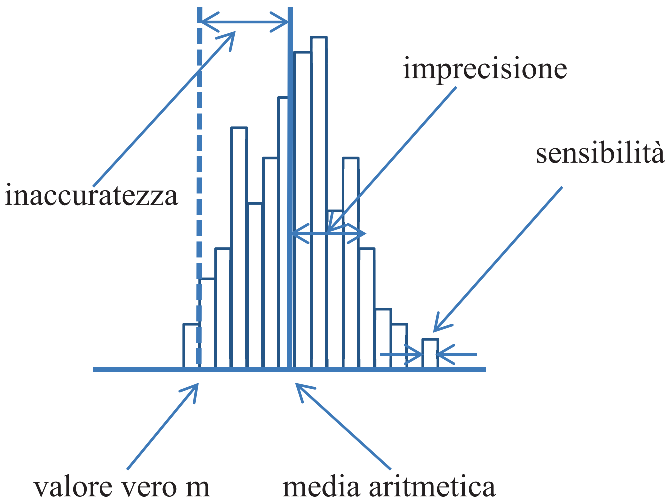
Si definisce accuratezza di uno strumento la sua capacità di fornire una risposta prossima al valore vero del misurando. Il reciproco di questo concetto è l’inaccuratezza che cerca di quantificare la presenza di errori sistematici evidenziabile, sotto condizioni di ripetitività, dalle differenze delle medie aritmetiche di campioni di misure ottenuti mediante metodi e/o strumenti diversi.
Una volta evidenziata l’inaccuratezza di uno strumento se ne deve ridurre l’entità o tramite l’aggiustamento, operazione che altera uno strumento di misura al fine di riportarne le caratteristiche entro i valori limite previsti; p.es. l'azzeramento di un ohmmetro o di un Palmer o mediante una calibrazione, operazione che non altera uno strumento di misura e porta alla conoscenza della differenza fra i valori indicati dallo strumento e i corrispondenti valori veri.

ESERCIZIO: Discutere sensibilità, precisione e accuratezza di un orologio fermo

Una visualizzazione efficace degli effetti degli errori casuali e sistematici: si immagini un tiro al bersaglio sparando sei colpi con armi caratterizzate da diverse precisioni e accuratezze[22].



Questo è invece come si presenterebbe una serie di misure in presenza di errori casuali e sistematici:



”CENNI” AL CALCOLO DELLE PROBABILITA’ E ALLA STATISTICA[23]

Scopo: significato di $\bar{X} - \sigma_S(\bar{X}) < m < \bar{X} + \sigma_S(\bar{X})$

Dall’analisi dei risultati sperimentali (statistica) si ottengono previsioni (probabilità).

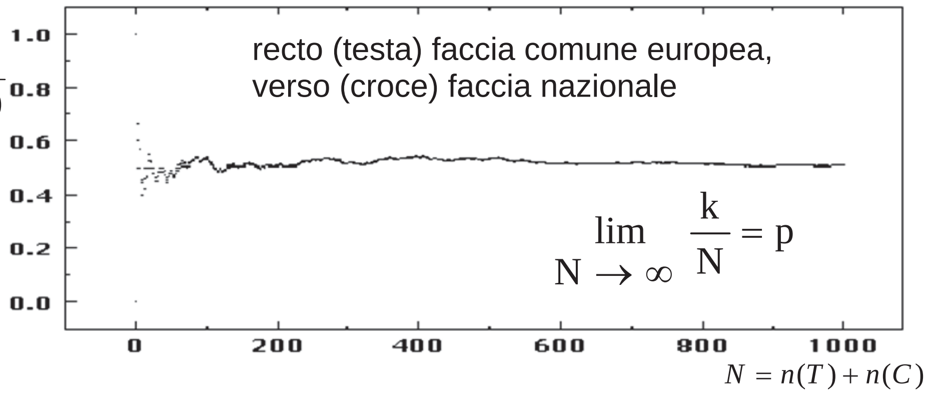
Probabilità: **grado di fiducia nel verificarsi di un evento**.

$0 \le p \le 1$ (0: impossibile; 1: certezza)

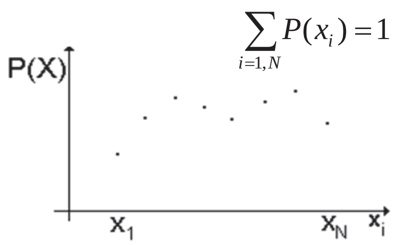
$$p = \frac{\#\ \text{casi favorevoli}}{\#\ \text{casi possibili}} \qquad\qquad p = \lim_{N \to \infty} \frac{k\ (\text{successi})}{N\ (\text{tentativi})}$$

definizione classica — definizione frequentistica

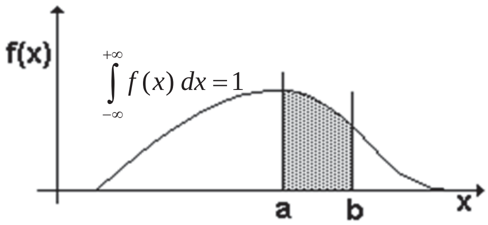
$$\frac{k}{N} = \frac{n(T)}{n(T) + n(C)}$$



Si definisce <u>variabile aleatoria</u> (<u>discreta</u>) la variabile $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ che assume i valori per la quale è definita non in base a leggi deterministiche ma al caso.
La funzione P(X) definita per i valori X $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ è detta <u>distribuzione di probabilità</u> della variabile aleatoria discreta X



v.a. discreta



v.a. continua

Se X è una v.a associata ad una grandezza continua si può definire la probabilità infinitesima che la <u>v.a. continua</u> X assuma un valore compreso fra x e x+dx:
$P(x \le X < x+dx) = dP(x) = f(x)\, dx$ dove $f(x)=dP(x)/dx$ è la <u>densità di probabilità o funzione di distribuzione</u>
La probabilità che X assuma un valore compreso fra **a** e **b** è:

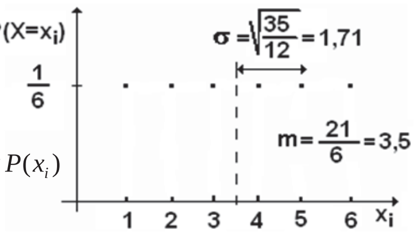
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

[23] Si tratta di una trattazione grossolana e affrettata dovuta al pochissimo spazio che si può dedicare in un corso di laboratorio a questi argomenti FONDAMENTALI; mi scusino i colleghi matematici.

Una distribuzione di uso molto frequente è la distribuzione uniforme: trova applicazione in tutti quei casi in cui, definito un certo intervallo è certo che la v.a. assuma valori tutti uguali al suo interno (in assenza di altre indicazioni non c’è un valore preferibile rispetto ad altri)

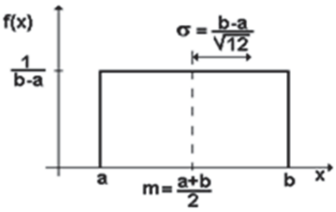
$$E(X) = \sum_{i=1,N} x_i \, P(x_i)$$

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1,N} (X_i - E(X))^2 P(x_i)$$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx$$

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)$$

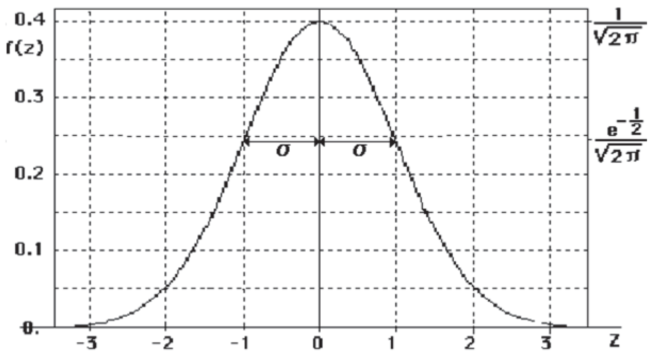


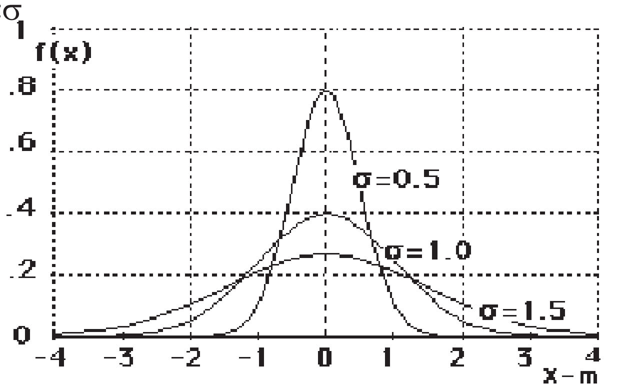
E(X) è il valore medio della distribuzione

$\sigma = \sqrt{\sigma^2(X)}$ la deviazione standard (sigma) è la radice quadrata della varianza: è un indice di quanto i valori della distribuzione sono concentrati intorno al suo valore medio E(X)

La distribuzione di uso più frequente in assoluto è la distribuzione di Gauss (gaussiana o normale): trova applicazione in tutti quei casi in cui un valore ben definito m è alterato da una infinità di cause infinitesime che alterano in eccesso o in difetto la sua misura

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$





$$z = \frac{x - m}{\sigma}$$

LIVELLI DI CONFIDENZA

Si può calcolare quale sia la probabilità che una v.a. assuma un particolare valore all’intervallo di un certo intervallo. Si definisce intervallo di confidenza l’intervallo in cui si ritiene che venga assunto il valore della v.a. e livello di confidenza il grado di fiducia che si ha nel fatto che ciò avvenga.

Per una distribuzione di **Gauss** si ha:

$P(m - 1\,\sigma \leq X \leq m + 1\,\sigma) = 68{,}3\%$

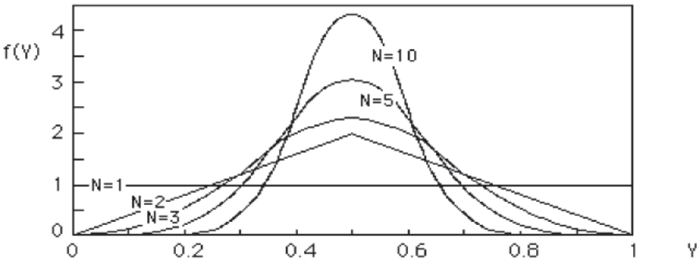
$P(m - 2\,\sigma \leq X \leq m + 2\,\sigma) = 95{,}4\%$

$P(m - 3\,\sigma \leq X \leq m + 3\,\sigma) = 99{,}7\%$

La deviazione standard della media aritmetica è legata alla deviazione standard della distribuzione di X dalla relazione : $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$

"**Teorema del limite centrale**": la distribuzione di probabilità di una somma di variabili aleatorie tende ad essere gaussiana la crescere del numero di variabili.

L'importanza del teorema consiste nel fatto che la media aritmetica è una somma di N variabili (divisa per N) e quindi tanto più N è elevato, tanto più la media aritmetica ha una distribuzione gaussiana;



SI ASSUME PERTANTO CHE LA MEDIA ARITMETICA DI UNA SERIE DI NUMEROSE MISURE SIA DISTRIBUITA GAUSSIANAMENTE CON UN ELEVATO LIVELLO DI FIDUCIA CHE IL SUO VALORE DISTI DALLA MEDIA (che rappresenta il valore vero) PER CIRCA UNA DEVIAZIONE STANDARD (della media).

$$m - \sigma(\overline{X}) < \overline{X} < m + \sigma(\overline{X})$$

La miglior stima della media m della variabile aleatoria X con m = E(X) è la media aritmetica di una serie di N determinazioni sperimentali della grandezza associata a X:

$$m \approx \overline{X} = \frac{\sum_{i=1,N} x_i}{N}$$

La miglior stima della deviazione standard σ della variabile aleatoria X con $\sigma = E[(X-m)^2]$ è la deviazione standard sperimentale[24] di una serie di N determinazioni sperimentali della grandezza associata a X:

$$\sigma(X) \approx \sigma_s(X) = \sqrt{\sigma_s^2(X)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,N}(x_i - \overline{X})^2}{N-1}}$$

Essendo $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{N}}$ si assume: $\sigma_s(\overline{X}) = \frac{\sigma_s(X)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,N}(x_i - \overline{X})^2}{N(N-1)}}$

Di conseguenza[25]: $\overline{X} - \sigma_S(\overline{X}) < m < \overline{X} + \sigma_S(\overline{X})$ e quindi al crescere di N si riduce l'intervallo di confidenza in cui è elevata la probabilità che la media aritmetica sia nell'intorno di m e, viceversa, cosa che interessa a chi cerca di determinare m a partire da misure di X.

Con la notazione X = (40,35 ± 0,14) cm indicheremo che il risultato di una misurazione ha fornito 40,21 cm ÷ 40,49 cm come intervallo in cui è elevata la probabilità che si trovi il valore vero cercato (<u>non c'è certezza che il valore vero sia all'interno dell'intervallo</u>)

[24] La stessa quantità è chiamata in molti altri modi: p.es. deviazione standard campionaria o deviazione standard statistica, a volte brutalmente semplicemente "sigma"

[25] L'espressione $\overline{X} - \sigma_S(\overline{X}) < m < \overline{X} + \sigma_S(\overline{X})$ deriva da $|\overline{X} - m| < \sigma_S(\overline{X})$

CIFRE SIGNIFICATIVE E DECIMALI: CONVENZIONI

I metodi di misura, gli strumenti e l'osservatore/misuratore/operatore possono essere classificati in base a:

sensibilità: capacità di apprezzare piccole variazioni delle grandezze in esame
precisione: capacità di produrre lo stesso risultato ripetendo più volte la stessa osservazione (**errori casuali trascurabili**)
accuratezza: capacità di produrre un risultato **esente da errori sistematici**

Quanto più una misura è spinta (è necessario determinare i particolari) (**sensibilità**)
tanto meglio (piccoli errori casuali) si dovrà osservare il fenomeno (**precisione**)
e tanto più si dovrà porre attenzione agli errori sistematici (**accuratezza**)
Di conseguenza il valore numerico della misura andrà riportato con un maggior numero di cifre (**cifre significative**)
Più sono le cifre significative, migliore deve essere la qualità della misura che implica quindi un maggior *costo*: acquisto(€), manutenzione, strumentazione, personale, tempo, facilità d'uso, ...

Il numero di cifre significative del risultato di una misura è strettamente correlato alla bontà della misura e non può essere scelto arbitrariamente

Il numero delle cifre decimali può essere variato modificando l’unità di misura: 10,5 mm = 1,05 cm

Per stabilire il numero di cifre significative di un numero occorre togliere l'eventuale virgola e contare tutte le cifre a partire dalla prima a sinistra non nulla

numero	cifre	cifre decimali	cifre significative
12 300	5	0	5
1 230,0 x 10	5	1	5
123,0 x 10^2	4	1	4
1,23 x 10^4	3	2	3
0,123 0 x 10^5	5	4	4

I valori numerici del risultato di una misura e della sua incertezza non devono essere riportati con un numero eccessivo di cifre significative.
Se un numero ha più cifre significative di quante ne occorrano, il numero va **arrotondato** (approssimando all'unità superiore se l'ultima cifra è 5 o superiore)

0,445 945 0,445 95 0,445 9 0,446 0,45 0,4
0,445 95
0,446 0
0,446 <--- arrotondamenti successivi: differiscono al più
0,45 per la meno significativa delle cifre dai valori
0,5 ottenuti direttamente

Usualmente **l'incertezza viene riportata arrotondando il valore con due cifre significative**.
Ad esempio: l'incertezza 6,749 diventa 6,7 mentre 6,750 diventa 6,8

I valori dei risultati devono essere arrotondati opportunamente per avere un numero di posizioni decimali consistenti con le incertezze. Ad esempio: 43,12 con l'incertezza 6,7 diventa (43,1 ± 6,7); con l'incertezza 12 diventa (43 ± 12)

Qualora fosse necessario aggiungere altre cifre non ricavabili dai dati, si possono aggiungere degli zeri: p.es. lettura di un Palmer d = 3,451 mm; stima dell'incertezza 2,9 μm e quindi il risultato diventa d = (3 451,0 ± 2,9) μm
Per alcune applicazioni è sufficiente rappresentare l'incertezza mediante il numero di cifre significative del risultato; in tal caso il risultato deve essere riportato con un numero di cifre significative tale per cui l'incertezza corrisponda all'ultima di esse:

m = (100,021 47 ± 0,000 35) g -> m = 100,021 5 g
R = (10,058 ± 0,027) Ω -> R = 10,06 Ω

ESERCIZI

• **1)** Riportare con due cifre significative i valori:

π e $\sqrt{2}$ $\vec{g}$ 0,432 324,43 $3\text{x}10^7$

• **2)** Riportare con due cifre significative i valori pari al:

2,3% di 342,4 26% di 0,421 0,13% di $723\text{x}10^4$

• **3)** Determinare il risultato della serie di queste misure:
I(mA): 124 136 142 117 140 138 125

Occorre calcolare la media aritmetica: $\bar{I}$=131,714 29 mA
la deviazione standard: $\sigma_s(I)$ = 9,604 0 mA
e la deviazione standard della media: $\sigma_s(\bar{I})$ = 3,629 97 mA

E, applicando le regole sulla notazione occorre:

A) riportare la <u>deviazione standard</u> della media con due cifre <u>significative</u>
$\sigma_s(\bar{I})$ = 3,6 mA

B) arrotondare la <u>media</u> in modo da avere lo stesso numero di cifre <u>decimali</u> della deviazione standard $\bar{I}$ = 131,7 mA

C) per riportare correttamente il risultato di una serie di misure dovrete utilizzare le regole A) e B) dell’esempio ed utilizzare la notazione:

I = (131,7±3,6) mA

STIMA DELLE INCERTEZZE

Nel 1993 l'Organizzazione Internazionale per la Standardizzazione (ISO) ha pubblicato([26]) una "Guida all'espressione dell'incertezza di misura" basata sulle raccomandazioni dell'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure (BIPM). La Guida riassume i fondamenti teorici, le definizioni e le procedure elaborate dalle più autorevoli organizzazioni mondiali di metrologia:

BIPM	Bureau International de Poids et Mesures
IEC	International Electrotechnical Commission
IFCC	International Federation of Clinical Chemistry
ISO	International Organization for Standardization
IUPAC	International Union of Pure and Applied Chemistry
IUPAP	International Union of Pure and Applied Physics
OIML	International Organization of Legal Metrology

Aderiscono all'iniziativa anche altri istituti nazionali affiliati come, ad esempio:

DIN	(D)	Deutsches Institut fur Normung
NIST	(USA)	National Institute of Standards and Technology
UNI	(I)	Ente Italiano per l'Unificazione

Seguono alcuni passi significativi ricavati da tale guida:

INCERTEZZE DI TIPO A E DI TIPO B:

1) *The uncertainty in the result of a measurement generally consists of several components which may be grouped into two categories according to the way in which their numerical value is estimated:*
A*: those which are evaluated by statistical methods*
B*: those which are evaluated by other means.*
There is not always a simple correspondence between the classification into categories A or B and the previously used classification into "random" and "systematic" uncertainties. The term "systematic uncertainty" can be misleading and should be avoided.

2) *The components in category A are characterized by the estimated variances or the estimated "standard deviations" and the number of degrees of freedom.*

3) *The components in category B should be characterized by quantities which may be considered as approximations to the corresponding variances, the existence of which is assumed.*

4) *The combined uncertainty should be characterized by the numerical value obtained by applaying the usual method for the combination of variances. The combined uncertainty and its components should be expressed in the form of "standard deviations".*

5) *If, for a particular application, it is necessary to multiply the combined uncertainty by a factor to obtain an overall uncertainty, the multiplying factor used must always be stated.*

For estimate of an input quantity X_i that has not been obtained from repeated observations, the standard uncertainty is evaluated by scientific judgment based on all the available information on the possible variability of X_i. The pool of information may include:

[26] International Organization for Standardization (ISO), "Guide to the expression of uncertainty in measurement", Geneva, Switzerland, 1993.

- *previous measurement data;*
- *experience with or general knowledge of the behavior and properties of relevant materials and instruments;*
- *manufacturer's specifications;*
- *data provided in calibration and other certificates;*
- *uncertainties assigned to reference data taken from handbooks.*

… inoltre …

*Lo scopo di ogni misurazione è la determinazione del valore vero di un misurando **M**.*
*Le imperfezioni degli strumenti, le variazioni delle condizioni ambientali e l'influenza dell'osservatore (nonché i suoi sbagli) provocano errori di misura. Essi sono il motivo per cui non è possibile trovare il valore vero **M**.*

*Si assume che i valori $\boldsymbol{x_i}$ ottenuti da diverse misurazioni individuali di una serie di misurazioni altro non sono che le determinazioni di una variabile casuale **X**.*
*Questa variabile aleatoria **X** obbedisce ad una distribuzione di probabilità caratterizzata in particolare da due parametri che sono il valore atteso **m** e la deviazione standard $\boldsymbol{\sigma}$.*

*In assenza di errori sistematici il valore atteso **m** coincide col valore vero **M** del misurando. La deviazione standard $\boldsymbol{\sigma}$ è una misura della variabilità, per via dell'errore casuale, di un singolo valore misurato dal valore atteso del misurando.*

*I parametri **m** e $\boldsymbol{\sigma}$ della distribuzione di probabilità non sono generalmente noti. Il problema consiste nel determinare delle loro stime a partire da una serie di misurazioni.*
*Usualmente per la stima di **m** si utilizza la media aritmetica $\overline{\mathbf{X}}$ e per quella di $\boldsymbol{\sigma}$ si utilizza la deviazione standard sperimentale $\boldsymbol{\sigma_s}$. Poiché i valori misurati sono realizzazioni di una variabile aleatoria, $\overline{\mathbf{X}}$ fluttuerà statisticamente intorno a **m** e $\boldsymbol{\sigma_s}$ intorno a $\boldsymbol{\sigma}$.*

*Sulla base delle assunzioni riguardanti il tipo di distribuzione (spesso si assumerà quella gaussiana) con l'aiuto dei valori $\overline{\mathbf{X}}$ e $\boldsymbol{\sigma_s(\overline{\mathbf{X}})}$ è possibile determinare un intervallo di confidenza all'interno del quale è contenuto, con un livello di confidenza fissato, il valore **m**.*

Gli effetti noti degli errori sistematici vengono eliminati applicando correzioni. Per gli altri, sconosciuti, un approccio per la loro riduzione consiste nell'allargamento dell'intervallo di confidenza in base alle assunzioni applicabili al tipo di misurazione effettuata.

Adattato dalle norme DIN 1319 parte[27]:

[27] anziché riportare accuratamente tutta la normativa relativa al trattamento dei dati sperimentali ho preferito rielaborarla prendendone solo alcuni elementi e adattandoli ai contenuti del corso. L'arbitrarietà (e in alcuni casi, purtroppo, anche la superficialità) di questa operazione non rende sempre utilizzabile il materiale per scopi professionali ma a volte ho preferito sacrificare il rigore formale all'efficacia didattica. Me ne scuso con i professionisti e gli operatori del settore. Gli studenti interessati possono contattarmi per conoscere la documentazione originale

Elaborazione di dati sperimentali

MISURE DIRETTE

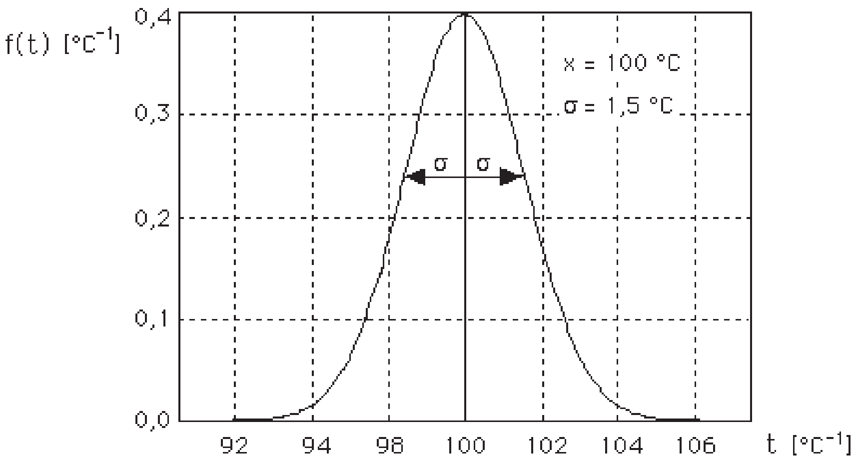
Incertezze di tipo A

Sono quelle ottenute a partire dalla deviazioni standard sperimentale della media aritmetica:

$$\sigma_s(\overline{X}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,N}(x_i - \overline{X})^2}{N(N-1)}}$$

••• Il numero N di osservazioni deve essere sufficientemente elevato affinché $\overline{X}$ sia una stima affidabile di m e $\sigma_S(\overline{X})$ sia una stima affidabile della sua deviazione standard.
Tuttavia se X è distribuita gaussianamente (e spesso lo è) già con solo 5 misure c'è una probabilità di circa il 90% che x sia compreso nell'intervallo $[\overline{X}-2\sigma_s(\overline{X});\overline{X}+2\sigma_s(\overline{X})]$.

••• ESEMPIO: La figura seguente rappresenta una distribuzione normale di differenze di temperature t di valor medio 100 °C e deviazione standard 1,5 °C. L'area sottesa dalla curva, rappresentando la probabilità che t assuma un valore qualsiasi (certezza), vale 1 (o 100%).



Viene estratto casualmente dalla distribuzione un campione di 20 valori che rappresentano altrettante misurazioni di t.
Tali valori sono riportati nella tabella raggruppati in intervalli di 1°C per ottenere un istogramma[28]

t_1 (°C)	t_2 (°C)	t (°C) con $t_1 \le t < t_2$
95,5	96,5	-
96,5	97,5	96,90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	-

[28] la preparazione di un istogramma non è necessaria per l'analisi statistica dei dati ma spesso aiuta a capire se il campione di misure ottenuto è sufficiente per elaborare i dati con la precisione richiesta

La media aritmetica delle 20 osservazioni è 100,145 °C e si assume che sia la miglior stima del valor vero di t.

La deviazione standard sperimentale è pari a 1,489 °C e la deviazione standard sperimentale della media aritmetica è pari a 0,333 °C: t = (100,15 ± 0,33)°C.

Incertezze di tipo B

non sono ottenute come deviazione standard sperimentali della media aritmetica.

Se di una grandezza X viene eseguita una sola misurazione, l'incertezza non può essere ricavata dall'unica misura a disposizione ma dalla conoscenza delle caratteristiche degli strumenti utilizzati o da risultati precedenti eseguiti nelle stesse condizioni e con gli stessi strumenti. In questo caso si assumerà come incertezza di tipo B quella ottenuta precedentemente con l'ipotesi che l'entità degli errori sulla singola misura non sia variata nel frattempo.
Se non è nota la distribuzione di X all'interno di un certo intervallo, si può solo assumere che essa sia costante nell'intervallo e nulla all'esterno (distribuzione uniforme)[29]. In questo caso la deviazione standard è pari a $\frac{1}{\sqrt{12}}$ (= 0,29) volte la larghezza dell'intervallo (per esempio 0,29 volte la divisione sulla scala dello strumento analogico o l'intervallo definito da una tolleranza).

Torniamo all'esempio delle 20 misurazioni di t. Se l'unica assunzione possibile fosse stata che la differenza di temperatura era compresa fra i valori 96 °C e 104 °C la stima del valore vero di t sarebbe stata 100 °C e quella dell'incertezza (assumendo una distribuzione uniforme fra 96 °C e 104 °C) $8°C/\sqrt{12} \approx 2{,}3$ °C (deviazione standard di una distribuzione uniforme). Di conseguenza la misura di t sarebbe stata: t = (100,0 ± 2,3)°C.

INCERTEZZE ASSOLUTE E RELATIVE

La quantificazione assoluta dell'incertezza non consente di valutare la bontà di una misura.
Per esempio l'incertezza 0,12 cm è indice di una ottima misura se il valore misurato è di 30,23 cm ma rappresenta una misura di scarsa qualità se il valore misurato è 0,35 cm.
Per questo motivo spesso si rapporta l'incertezza al valore della misura: $\frac{\sigma(X)}{|X|}$ **(incertezza relativa di X)**
per cui le due misure precedenti presentano incertezze relative rispettivamente di:
0,12 cm/30,23 cm = 0,0039696 = 0,39696 % ≈ 0,40 %
0,12 cm/0,35 cm = 0,3429 = 34,29 % ≈ 34 %
dove nell'ultimo passaggio si utilizza la convenzione di utilizzare due cifre significative per esprimere le incertezze.
Il confronto sulla qualità delle due misure è ora immediato.

---

[29] Notare che, nel caso non sia nota la distribuzione di X_i all'interno dell'intervallo che ne contiene "tutti" i valori, l'assunzione di una distribuzione uniforme implica una deviazione standard pari a $\frac{1}{\sqrt{12}}$ volte l'intervallo mentre una distribuzione normale, approssimando il livello di confidenza del 99,73% al 100%, implica una deviazione standard pari a $\frac{1}{6}$ dell'intervallo. La differenza è trascurabile se si pensa a quanta informazione è necessaria per giustificare l'una anziché l'altradistribuzione.

Nella formula dell'incertezza relativa σ(X) rappresenta la deviazione standard sperimentale di tipo A o B (cioè la migliore stima dell'incertezza della misura) e X la media aritmetica delle misure o il valore dell'unica misura effettuata (cioè la migliore stima del valore vero).
La strumentazione di uso comune produce incertezze relative[30] dell'ordine del %. Valori superiori al 10% non sono sempre accettabili[29]. Ottenere incertezze inferiori allo 0,1 % senza aver utilizzato strumentazione di qualità o metodi particolari è spesso sinonimo di sbagli di calcolo.

Va prestata attenzione al denominatore della formula dell'incertezza relativa: le incertezze relative perdono significato se le misure sono pressoché nulle. In questo caso eventuali confronti possono basarsi solo sulle incertezze assolute.

MISURE INDIRETTE

spesso un misurando Y non è misurato direttamente ma è determinato da altre M grandezze (misurate direttamente) $X_1, X_2, ..., X_M$ attraverso la relazione:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_M) \qquad (1)$$

che può essere una definizione o una legge geometrica, fisica o di qualunque altro tipo che lega fra loro diverse grandezze fisiche.

Una stima (misura indiretta) y della grandezza Y è data da:

$$\boxed{Y \approx y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_M)}$$

dove col simbolo $\overline{X}_i$ si intende la media aritmetica $\frac{\sum_{k=1,N} X_{ik}}{N_i}$ delle N_i misure x_{ik} di X_i (ottenuta con incertezza di tipo A) o l’unica determinazione X_i (con incertezza di tipo B).

Questa stima è corretta solo se la funzione è lineare; altrimenti costituisce un'approssimazione valida al primo ordine di uno sviluppo in serie di Taylor della funzione.

PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE ASSOLUTE

La deviazione standard sperimentale del risultato di una misurazione ottenuto dai valori di altre grandezze fra loro indipendenti[31] è detta **incertezza standard combinata**:

$$\boxed{\sigma(y) \approx \sigma_s(y) = \sqrt{\sum_{i=1,M} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)\Bigg|^2_{X_i=\overline{X}_i} \sigma_s^2(\overline{X}_i)}} \qquad (2)$$

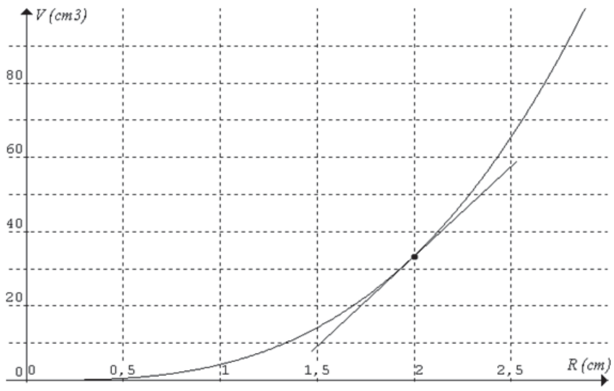
[30] dato che l'incertezza relativa è una quantità adimensionale consente il confronto fra le prestazioni di strumenti che misurano grandezze fisiche diverse: un metro con divisioni al mm è migliore di una bilancia con portata 1 kg e sensibilità 10 g/div

[31] Se le grandezze sono correlate l'espressione più appropriata per la varianza combinata richiede l'uso delle covarianze. Nelle esperienze svolte durante il corso il grado di correlazione sarà in generale trascurabile e quindi riterremo la (2) sufficientemente accurata per i nostri scopi.

Essa è basata sullo sviluppo della funzione (1) in serie di Taylor al primo ordine effettuato nell’intorno del punto in cui si effettuano le misure. Anche le derivate parziali[32] sono calcolate nei valori medi $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_M$ e le $\sigma_s(\overline{X}_i)$ sono assunte come le rispettive incertezze di tipo A o B[33].

Qualora la non linearità di f nell'intorno dei valori medi $\overline{X}_i$ sia significativa, all'equazione (2) vanno sommati termini di ordine più elevato.

Questa stima è esatta solo se la funzione è lineare; altrimenti costituisce una approssimazione al primo ordine dello sviluppo in serie di Taylor



ESEMPIO[34]: $V = 4/3\ \pi\ R^3$

$$\sigma_s(V) = 4\pi R^2 \sigma_s(R)$$

Nel grafico si vede quanto sia linearizzabile la funzione $V = 4/3\ \pi\ R^3$ nell'intorno della misura R = 2 cm: è sufficiente che $\sigma_s(R)$ non faccia variare i risultati di una misura di R fuori dell'intervallo [1,8 cm; 2,2 cm] in cui la retta tangente approssima "bene" la funzione.

SBAGLIO FREQUENTE

$Y = a\ X + b\ X^2$

$$\cancel{\sigma(Y) = \sqrt{a^2\sigma^2(X)+4b^2x^2\sigma^2(X)} = \sqrt{a^2+4b^2x^2}\,\sigma(X)}$$

anziché $\sigma(Y) = |(a + 2\ b\ x)|\ \sigma(X)$:

la formula di propagazione è ottenuta considerando variabili indipendenti; X e X^2 non lo sono !

Nelle esperienze svolte durante il corso la non linearità e la correlazione saranno in generale trascurabili e la (2) verrà ritenuta sufficientemente accurata per i nostri scopi.

PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE RELATIVE

se la funzione (1) è un monomio: $\boxed{Y = c\ X_1^{p_1} X_2^{p_2} \ldots X_M^{p_M}}$ l'incertezza standard combinata può essere ottenuta più rapidamente a partire dall'incertezza relativa[35]:

---

[32] Le derivate parziali $\partial f/\partial x_i$ andrebbero calcolate, in linea di principio, nei valori attesi delle X_i; in realtà vengono calcolate nei loro valori stimati $\overline{X}_i$. Queste derivate sono dette **coefficienti di sensibilità** perché descrivono di quanto varia la grandezza y al variare delle X_i. La varianza combinata $\sigma^2(y)$ viene quindi vista come somma di termini ognuno dei quali rappresenta la stima della varianza di y dovuta alla variazione di X_i. I coefficienti di sensibilità sono ricavabili misurando la variazione di Y al variare di una particolare X_i mentre le altre grandezze X restano costanti.

[33] Se la grandezza X_i viene misurata una sola volta, nell'espressione dell'incertezza combinata comparirà quella misura (non c'è una media aritmetica) e al posto dell'incertezza di tipo A comparirà necessariamente quella di tipo B

[34] **se la (1) è funzione della sola X allora la (2) diventa banalmente $\sigma_s(Y) = |dY/dX|_x\ \sigma_s(X)$**

[35] Può essere un esercizio assai utile provare a sostituire nella (2) l'espressione del monomio: otterrete la (3)

$$\boxed{\frac{\sigma_s(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1,M} p_i^2 \left(\frac{\sigma_s(\overline{X}_i)}{\overline{X}_i}\right)^2}} \qquad (3)$$

VALIDA SOLO PER MONOMI[36]

È consigliato l'uso, quando possibile, della (3) al posto della (2) per due motivi:
- il calcolo delle derivate, appena la funzione diventa un poco complessa, diventa pesante
- non è facile distinguere i contributi dati dalle misure dirette e quindi verificare la bontà del calcolo.

SBAGLIO FREQUENTE

$Y = a\,X + b\,X_0$ $\qquad$ ~~σ(Y)/|y| = |a| σ(X)/|x|~~

anziché $\sigma(Y)/|y| = |a|\,\sigma(X)/\,|a\,x + b\,X_0|$

Y non è sotto forma di monomio: l'incertezza relativa è data dal rapporto $\sigma(Y) = |a|\,\sigma(X)$ diviso per $|y| = |a\,x + b\,X_0|$!

••• Nel riportare il risultato di una misura indiretta occorre:
- dare la descrizione completa di come è definita la grandezza Y;
- riportare il valore e l'incertezza di ogni grandezza che contribuisce alla grandezza Y e la descrizione di come sono stati ottenuti;
- fornire la stima di Y e la deviazione standard combinata con le unità di misura;
- qualora sia appropriato fornire anche l'incertezza relativa.

ESEMPI

• 1) Misurare la grandezza derivata "densità di una sfera": $\rho = \dfrac{m}{\frac{4\pi}{3} r^3}$ (a)

Supponiamo di aver misurato la massa m ($m = \overline{m} \pm \sigma_s(\overline{m})$) e il raggio r ($r = \overline{r} \pm \sigma_s(\overline{r})$).

Dalla (2) si ha: $$\sigma(\rho) = \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{4\pi}{3}\overline{r}^3}\right)^2 \sigma_s^2(\overline{m}) + \left(-3\frac{\overline{m}}{\frac{4\pi}{3}\overline{r}^4}\right)^2 \sigma_s^2(\overline{r})} \qquad (b)$$

In questo caso però è possibile, e quindi preferibile, applicare la (3) che è di uso più immediato (non richiede calcoli di derivate): $$\frac{\sigma(\rho)}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_s(\overline{m})}{\overline{m}}\right)^2 + (-3)^2\left(\frac{\sigma_s(\overline{r})}{\overline{r}}\right)^2} \qquad (c)$$

da cui si ottiene: $$\sigma(\rho) = \rho\sqrt{\left(\frac{\sigma_s(\overline{m})}{\overline{m}}\right)^2 + 9\left(\frac{\sigma_s(\overline{r})}{\overline{r}}\right)^2} \qquad (d)$$

Va notato che matematicamente le due formule (b) e (d) sono coincidenti: entrambe derivano dalla linearizzazione della (a) mediante sviluppo in serie di Taylor nell'intorno del punto $(\overline{m}, \overline{r})$[37]

---

[35] Può essere un esercizio assai utile provare a sostituire nella (2) l'espressione del monomio: otterrete la (3)
[36] **se la (1) è funzione della sola X allora la (3) diventa banalmente $\sigma_s(Y)/|Y| = |p|\,\sigma_s(X)/|X|$**

• 2) Misurare la densità di un cilindro di massa M, altezza h e diametro d a partire dai dati:

M = 13,2 12,4 14,0 12,8 14,6 13,5 g

h = 10,02 cm (una sola misura con strumento analogico)

d: in misure precedenti si era ottenuto 8,500 mm mediante calibro (50μm/div)

M: dai dati si ricava $\sum_{i=1,6} m_i = 80{,}5\,g$ e quindi $\overline{M} = \frac{\sum_{i=1,6} m_i}{6} = 13{,}427\,g$; inoltre

$\sum_{i=1,6} m_i^2 = 1083{,}25\,g^2$ e quindi $\sigma_M = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,6} m_i^2 - 6\cdot\overline{M}^2}{5}} = 0{,}801\,g$ da cui $\sigma_{\overline{M}} = \frac{\sigma_M}{\sqrt{6}} = 0{,}326\,g$

Pertanto $M = (13{,}43 \pm 0{,}33)\times 10^{-3}\,kg$

h: l'unica misura è riportata al decimo di mm; quindi la divisione dello strumento è il mm;
σ_B= 1mm/√12 = 0,29 mm Pertanto $h = (100{,}20 \pm 0{,}29)\times 10^{-3}\,m$

d: σ_B= 50μm/√12 = 14,43 μm Pertanto $d = (8{,}500 \pm 0{,}014)\times 10^{-3}\,m$

e quindi $\rho = \frac{\overline{M}}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}} \pm \sqrt{\left(+\frac{1}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}}\right)^2 \sigma_{\overline{M}}^2 + \left(-2\frac{M}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^3\overline{h}}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(-\frac{M}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}^2}\right)^2 \sigma_h^2}$

$$\rho = 2\,362 \pm \sqrt{(175\,875)^2 (0{,}33\times 10^{-3})^2 + (-555\,766)^2 (0{,}014\times 10^{-3})^2 + (-23\,573)^2 (0{,}29\times 10^{-3})^2} =$$
$$= 2\,362 \pm \sqrt{(58{,}039)^2 + (7{,}781)^2 + (6{,}836)^2} = (2\,362 \pm 59)\ kg/m^3$$

Alternativamente, poiché la relazione $\rho = \frac{M}{\frac{\pi}{4}d^2 h}$ è un monomio, usando le incertezze relative:

$$M = (13{,}43 \pm 0{,}33)\times 10^{-3}\,kg \rightarrow \frac{\sigma_M}{M} = \frac{0{,}33\times 10^{-3}\,kg}{13{,}43\times 10^{-3}\,kg} = 0{,}02457 = 2{,}5\%$$

$$d = (8{,}500 \pm 0{,}014)\times 10^{-3}\,m \rightarrow \frac{\sigma_d}{d} = \frac{0{,}014\times 10^{-3}\,m}{8{,}5\times 10^{-3}\,m} = 0{,}0016471 = 0{,}16\%$$

$$h = (100{,}20 \pm 0{,}29)\times 10^{-3}\,m \rightarrow \frac{\sigma_h}{h} = \frac{0{,}29\times 10^{-3}\,m}{100{,}2\times 10^{-3}\,m} = 0{,}0028942 = 0{,}29\%$$

e quindi: $\rho = \frac{\overline{M}}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}} = 2362\ kg/m^3$ con $\sigma_\rho = \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)\rho = \sqrt{(+1)^2\left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 + (-2)^2\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + (-1)^2\left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}\ \rho$

---

[37] Anche se ρ varia col cubo di r, nell'intorno di $\overline{r}$ la funzione è linearizzabile: è sufficiente considerare valori di r che si discostino di poco da $\overline{r}$: $\frac{r-\overline{r}}{\overline{r}} << 1$. Nel nostro caso questo implica $\frac{\sigma(\overline{r})}{\overline{r}} << 1$, relazione generalmente verificata in tutte le misure.

pertanto: $\rho = 2\,362\left(1 \pm \sqrt{(0{,}025)^2 + 4(0{,}0029)^2 + (0{,}0016)^2}\right) = 2\,362(1 \pm 0{,}02571) = (2362 \pm 61)\ \mathrm{kg/m^3}$

La piccola differenza sulla seconda cifra delle incertezze nei due tipi di propagazione è dovuta al fatto che le incertezze vengono riportate con due cifre significative e quindi la meno significative risente dell'approssimazione

Convenzionalmente l'incertezza relativa si riporta con due cifre significative.
Ad esempio : σ_T/T = 1,26/34,713 = 0,0363 = 3,6%

• 3) Date le misure L1 = (20,42 ± 0,26) cm
L2 = (10,11 ± 0,43) cm

1) misurare la lunghezza **Ls = L1 + L2**

Ls = 30,53 cm ± σ_s(Ls)

$$\sigma_s(\mathrm{Ls}) = \sqrt{\left(\frac{\partial\,\mathrm{Ls}}{\partial \mathrm{L1}}\right)^2 \sigma_s^2(\mathrm{L1}) + \left(\frac{\partial\,\mathrm{Ls}}{\partial \mathrm{L2}}\right)^2 \sigma_s^2(\mathrm{L2})} = \sqrt{(+1)^2\sigma_s^2(\mathrm{L1}) + (+1)^2\sigma_s^2(\mathrm{L2})} = \sqrt{0{,}26^2 + 0{,}43^2} = 0{,}502\,5\ \mathrm{cm}$$

Ls = (30,53 ± 0,50) cm (1,6%)

2) misurare la lunghezza **Ld = L1 - L2**

Ld = 10,31 cm ± σ_s(Ld)

$$\sigma_s(\mathrm{Ld}) = \sqrt{\left(\frac{\partial\,\mathrm{Ld}}{\partial \mathrm{L1}}\right)^2 \sigma_s^2(\mathrm{L1}) + \left(\frac{\partial\,\mathrm{Ld}}{\partial \mathrm{L2}}\right)^2 \sigma_s^2(\mathrm{L2})} = \sqrt{(+1)^2\sigma_s^2(\mathrm{L1}) + (-1)^2\sigma_s^2(\mathrm{L2})} = \sqrt{0{,}26^2 + 0{,}43^2} = 0{,}502\,5\ \mathrm{cm}$$

Ld = (10,51 ± 0,50) cm (4,8%)

3) misurare l'area **A = L1 x L2**

A = 206,4462 cm^2 ± σ_s(A)

$$\sigma_s(\mathrm{A}) = \sqrt{\left(\frac{\partial\,\mathrm{A}}{\partial \mathrm{L1}}\right)^2 \sigma_s^2(\mathrm{L1}) + \left(\frac{\partial\,\mathrm{A}}{\partial \mathrm{L2}}\right)^2 \sigma_s^2(\mathrm{L2})} = \sqrt{(\mathrm{L2})^2\sigma_s^2(\mathrm{L1}) + (\mathrm{L1})^2\sigma_s^2(\mathrm{L2})} = \sqrt{10{,}11^2 0{,}26^2 + 20{,}42^2 0{,}43^2} = 9{,}166\ \mathrm{cm}^2$$

A = (206,4 ± 9,2) cm^2 (4,6%)

CONFRONTO FRA MISURE

Spesso occorre decidere se il risultato di una misura è attendibile, se rientra in un determinato intervallo di tolleranza, in generale occorre confrontare una misura con altri dati di riferimento o misure. Per far questo spesso si definisce a priori un livello di confidenza (tipicamente 68% 90% 95% 99% ma non solo) e si verifica se in base alla stima delle incertezze la misura ottenuta rientra nell’intervallo di confidenza stabilito in base al livello di confidenza prescelto.
A volte si preferisce considerare in accordo la misura che rientra in un intervallo di confidenza pari a tre deviazioni standard intorno al valore di riferimento.

Un altro criterio considera lo scarto relativo fra misura e dato di riferimento: durante questo corso la considereremo in accordo se dista meno del 5% e in disaccordo se si differenzia per più del 20%; non ci esprimeremo nei casi intermedi.

CONFRONTO MISURA – VALORE

Si vuole confrontare la misura $X \pm \sigma$ con il valore m.
Se la misura X fosse rappresentativa del valore vero m e σ stimasse correttamente l'incertezza associata alla misura allora:

lo **scarto** (assoluto) $\boldsymbol{\Delta} = X - m$ dovrebbe essere "piccolo" (quanto?) → qualitativo

lo **scarto relativo** $\mathbf{s} = \frac{X-m}{m}$ dovrebbe essere "piccolo" (pochi %) → qualitativo

la **variabile t**[38] $\mathbf{t} = \frac{X-m}{\sigma}$ dovrebbe risultare $|\,t\,| < 3$ → quantitativo

CONFRONTO MISURA – MISURA

Se non è dato un valore di riferimento, per confrontare fra loro le misure Se non è dato un valore di riferimento per confrontare fra loro le misure $X_1 \pm \sigma_1$ e $X_2 \pm \sigma_2$ occorrerà, a seconda del tipo di confronto, stimare il valore m:

lo **scarto** (assoluto) $\Delta = X_1 - X_2$ dovrebbe essere "piccolo" (quanto?) → qualitativo

lo **scarto relativo** $\mathbf{s} = \frac{X_2-X_1}{\frac{X_1+X_2}{2}}$ dove $\frac{X_1+X_2}{2}$ è la migliore stima di m

dovrebbe essere "piccolo" (pochi %) → qualitativo

la **variabile t** in questo caso viene costruita considerando che la differenza $X_1 - X_2$ dovrebbe essere nulla e che la misura di $X_1 - X_2$ ha un'incertezza $\sigma(X_1\text{-}X_2) = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

$\mathbf{t} = \frac{X_2-X_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$ dovrebbe risultare $|\,t\,| < 3$ → quantitativo

Lo scarto assoluto, anche se a volte utile, richiede una certa "sensibilità" da parte di chi analizza i dati per riconoscere o meno la compatibilità fra le misure;
lo scarto relativo, rapportando lo scarto assoluto al valore vero (o alla sua migliore stima), è di più semplice uso: all'interno di una particolare applicazione, un valore percentuale particolarmente basso o elevato è di facile interpretazione anche se non considera anche gli effetti degli errori di misura che possono falsare i risultati;
la variabile t quantifica maggiormente il significato dello scarto fra le misure:

se $|\,t\,| < 3$ significa che lo scarto è compatibile con la presenza dei soli errori casuali (eventuali errori sistematici sono trascurabili rispetto a quelli casuali); ripetendo più volte la/e misura/e è possibile ridurre, con le opportune medie aritmetiche, l'entità degli errori ed è possibile trovare una riduzione dello scarto.
Il confronto va considerato positivo e le misure compatibili (coincidenti).

Se $|\,t\,| > 3$ significa che lo scarto non è compatibile con la presenza dei soli errori casuali (sono presenti errori sistematici non trascurabili); ripetendo più volte la/e misura/e non è possibile ridurre, con le opportune medie aritmetiche, l'entità degli errori: lo scarto è significativo di una differenza fra i valori ottenuti.
Il confronto va considerato negativo e le misure non compatibili (diverse)

---

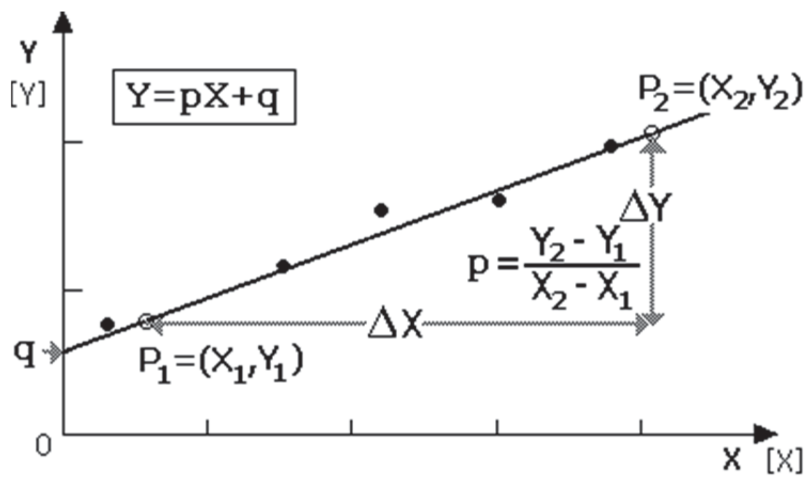
[38] non esiste una convenzione sul nome di questa grandezza: spesso si indica con z lo scarto standardizzato per una variabile gaussiana e con t una variabile di Student. Ho preferito mantenere questo nome per scopi mnemonici anche se, a rigore, è corretto solo nel caso di una media aritmetica di misure distribuite gaussianamente.

Studio della dipendenza funzionale di due grandezze fisiche

Supponiamo di voler studiare un sistema fisico ma di conoscerlo già a un livello tale da poter prevedere che se viene sottoposto alla sollecitazione X esso produrrà una risposta Y secondo la legge $\boxed{Y = \mathbf{p}\, X + \mathbf{q}}$ dove **p** e **q** sono due parametri incogniti, scopo della nostra misura[39].
Per ogni valore X_i della sollecitazione X (con i = 1, N valori diversi) eseguiamo una misura Y_i della grandezza Y.

Riportiamo su un grafico gli N punti che corrispondono alle coppie di misure.
Successivamente tracciamo la retta che meglio approssima i punti (minimizza le distanze dei punti della retta).
Poiché gli N punti su questo grafico rappresentano delle misure (quindi affette da errori) la retta (funzione analitica) non passa per tutti i punti sperimentali neanche se la nostra schematizzazione della legge fisica è corretta.
Dopo qualche tentativo si è però in grado di tracciare una retta che non si discosta per più di qualche percento da quella ottenibile mediante metodi statistici (retta dei minimi quadrati o di regressione).

Un grafico delle N coppie di misure si presenterebbe così dopo aver tracciato la retta: **Y = p X + q** della quale per il momento ancora non conosciamo i valori di **p** e **q**[40]



A questo punto non resta che determinare il valore della pendenza[41] **p** e dell'intercetta **q**.

[39] Spesso lo studio di un sistema più o meno complesso si riduce alla determinazione della sua risposta a sollecitazioni note. Si ricorre però a questo metodo anche quando una sola coppia di misure sarebbe in grado di fornire la risposta cercata. Il fatto è che lo studio della risposta a sollecitazioni diverse consente di evidenziare la presenza sia di errori sistematici e casuali nelle misure che anomalie nel comportamento del sistema in esame.
[40] Da questo momento in poi va dimenticata l'esistenza dei singoli punti: la migliore rappresentazione del fenomeno studiato è la retta che è stata tracciata
[41] Analiticamente si parla di coseni direttori o di coefficienti angolari ma in questo caso c'è da notare che sugli assi sono riportate unità di misura in generale diverse e addirittura di grandezze fisiche diverse. L'angolo che si potrebbe misurare con un goniometro cambierebbe se lo stesso grafico venisse ripetuto con scale diverse: tale angolo non ha nessuna relazione col significato fisico del parametro p. Per evitare confusione si preferisce parlare di pendenza (con dimensioni fisiche pari a quelle di Y/X).

Per la pendenza **p** si prendono due punti **sulla retta** quanto più distanti possibile al fine di minimizzare l'effetto degli errori di lettura delle coordinate dal grafico.

Evidenziate, ad esempio cerchiandoli, i due punti e riportate i valori delle coordinate $[x_1, y_1]$ e $[x_2, y_2]$ (con le unità di misura!) al fine di calcolare la pendenza come rapporto[42] fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse: $\mathbf{p} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

L'intercetta **q** **si legge direttamente dal grafico**: **q = Y(X=0)**.

La **statistica** consente di automatizzare e migliorare il procedimento utilizzato per tracciare la retta che meglio approssima i punti sperimentali. In particolare il **metodo dei minimi quadrati** calcola la distanza complessiva $U(p,q; x_1, x_2,\ldots x_N; y_1, y_2,\ldots y_N)$ dei punti misurati dalla generica retta ipotizzata. U è la somma delle distanza al quadrato di ogni coppia di valori X,Y dalla retta di parametri p e q: U(p,q). La migliore stima di p e q è quindi quella coppia p_s e q_s che minimizza U(p,q).
La retta con i parametri minimizzati $Y = p_s X + q_s$ è detta **retta di regressione** o **dei minimi quadrati**; le espressione di p_s e q_s sono inserite in tutte le calcolatrici scientifiche.

$$p_s = \frac{N\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{N\sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i} \qquad q_s = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i Y_i \sum X_i}{N\sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i}$$

Se non sono stati commessi sbagli i parametri ottenuti statisticamente e quelli elaborati graficamente devono essere molto simili: in caso contrario almeno uno dei due risultati è sbagliato.

Poiché le misure di X e Y sono affette da errori, i parametri p_s e q_s che sono calcolati a partire da esse possono essere visti come grandezze misurate in modo indiretto: applicando la propagazione delle incertezze assolute si può ricavare l’espressione dell’incertezza da associare a p_s e q_s.

e, posti $\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{N} - \left(\frac{\sum X_i}{N}\right)^2}$ e $\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum\left[Y_i - (p_S X_i + q_S)\right]^2}{N-2}}$

si ricavano: $\sigma_{p_S} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sigma_X}$ e $\sigma_{q_S} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{N}} \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{X}}{\sigma_X}\right)^2}$

Una volta che il metodo dei minimi quadrati è stato validato mediante l’elaborazione grafica si possono utilizzare le misure[43] di p_s e q_s per eventuali ulteriori analisi.

[42] La dimostrazione è banale …

[43] **Il metodo dei minimi quadrati fornisce delle misure nel senso che oltre ai valori p_s e q_s fornisce anche le loro incertezze: sono vere misure. Il metodo grafico fornisce dei valori approssimativi ma nessuna indicazione sul loro grado di affidabilità: non sono misure!**

Come redigere una relazione

Al termine di ogni esperimento occorre produrre una relazione che dia modo ad altri (o a noi stessi, in un secondo tempo) di conoscerlo e controllarlo nel suo complesso e rendere possibile la ripetizione delle misurazioni nelle stesse condizioni o l’approfondimento dello studio sperimentale svolto.

TESTO

Si deve trasmettere informazione. La relazione deve essere perciò **comprensibile**[44], **completa** (nessun aspetto importante deve essere tralasciato) ma **stringata** (un eccesso di informazione ovvia o secondaria confonde e nasconde quella importante)[45].
Il livello di dettaglio dipende dal destinatario; all’interno di questo corso è il docente che già conosce gli aspetti generali delle esperienze e la strumentazione in dotazione: in questo caso ciò che deve essere trasmesso sono gli eventuali problemi incontrati, le condizioni d’uso degli strumenti, eventuali anomalie osservate, in generale tutto ciò che non è possibile prevedere a priori dipendendo dalle situazioni contingenti nelle quali si è svolta l’esperienza e dalle scelte personali effettuate durante il suo svolgimento.

Pertanto non vanno descritti né l’aspetto teorico dell’esperienza né le modalità di esecuzione a meno che non siano difformi da quelle spiegate a lezione.

DATI

I dati dovranno essere riportati in modo tale da consentire sia il controllo dei risultati che una loro successiva elaborazione più approfondita. Vanno trascritti anche quelli che in seguito non sono stati utilizzati.

Alcune raccomandazioni (!!!):

- le formule vanno riportate nella forma in cui sono state effettivamente usate
- si devono riportare solo quei risultati matematici intermedi che non sono ovvi o che servano per controlli e verifiche (per esempio nel caso di propagazione di incertezze le formule e i calcoli relativi a una serie di misure vanno esplicitatati in uno e un solo caso)
- **i risultati finali vanno messi bene in vista** completi di incertezze e unità di misura.
- i dati vanno riportati usando le potenze di 10 in comune fra misura e incertezza perché permette di confrontare a vista la grandezza relativa dei due
- non riportare MAI più di 6 cifre significative (all'interno di questo corso le misure più precise non ne avranno più di 4-5)

TABELLE

Il modo più razionale di riportare molti dati è in forma di tabella perché permette confronti per colonne e/o righe, controlli di coerenza, di tendenze, etc.
Alcune raccomandazioni dettate in parte dalle convenzioni e in parte dalla praticità nell'uso:

- **ogni misura va riporta con l'unità di misura**
- **ogni misura va riportata corretto numero di cifre decimali**

se si tratta di misure dirette:

fino al decimo di divisione per letture di strumenti analogici;

[44] un testo scritto male può essere ancora decifrabile ma numeri scritti male sono del tutto inutilizzabili

[45] l’uso di disegni, anche se approssimativi, consente di trasmettere in modo conciso ed efficiente molte più informazioni di quante ne può spesso trasmettere un testo

tutte le cifre per letture di strumenti digitali
riportando anche gli eventuali zeri terminali

- ogni incertezza va riportata con l'unità di misura
- ogni incertezza va riportata col corretto numero di cifre significative

se si tratta di misure derivate:
se è stata già valutata l'incertezza
lo stesso numero di cifre decimali dell'incertezza riportata con due cifre significative
se non è stata ancora valutata l'incertezza
un numero sufficiente di cifre significative che non richieda successivamente la ripetizione dei calcoli (ma senza esagerare[46])

- **indicazioni ausiliarie comuni a tutti i dati di una colonna** (p. es . 10^n o unità) vanno riportate sull'intestazione: non devono ingombrare la tabella;
- **evitare colonne di dati uguali**; ricordarne l'esistenza in legenda;
- **conviene impostare tabelle in forma aperta** (possibilità di aggiungere colonne/righe).
- **evidenziare eventuali dati non graficati** motivandone l'esclusione;

È **particolarmente importante** che almeno i dati graficati siano riportati in una tabella. In questo modo le informazioni per realizzare il grafico andranno prese dalla tabella e non ricercate all'interno della relazione.
Inoltre, anche se non strettamente necessarie per la realizzazione del grafico, è importante che nella tabella compaiano anche le incertezze delle grandezze graficate: se un punto risultasse non allineato sarebbe assai rapido verificare se la discordanza è compatibile con l'incertezza della misura o è sinonimo di qualche altro effetto.

GRAFICI

Spesso lo studio di un sistema si può ricondurre alla valutazione della sua risposta a stimoli noti. In questo caso il comportamento del sistema viene completamente caratterizzato dalla sua funzione di trasferimento. Questa altri non è che la relazione funzionale che caratterizza l’andamento della risposta al variare della sollecitazione.
Per evidenziare la relazione che esiste fra le due variabili uscita e ingresso spesso non è sufficiente la rappresentazione sotto forma di tabella di una serie di misure delle due variabili.
Più efficacemente è utile una rappresentazione grafica dalla quale risalta immediatamente l’esistenza di una eventuale correlazione fra le grandezze, il suo tipo (lineare, quadratico, esponenziale, ecc.).

Anche se per la realizzazione professionale di un grafico è consigliabile l'utilizzo di opportuni programmi di calcolo e grafica, è fondamentale una fase di apprendimento che non può prescindere dalla loro realizzazione manuale. Per questo scopo sono a disposizione fogli di carta con divisioni ogni millimetro (carta millimetrata).
Nell’usare la carta millimetrata per riportare grafici di misure si consiglia:
- tutti i dati graficati devono essere presenti in una tabella;
- evidenziare eventuali dati non graficati motivandone l'esclusione;
- le scale sugli assi devono essere scelte in modo da **garantire la leggibilità delle coordinate di un qualsiasi punto** posto sul grafico (anche diverso dai punti risultati di misure) **SENZA DOVER UTILIZZARE UNA CALCOLATRICE!!!**;
- utilizzare il foglio di carta millimetrata a disposizione (**non è indispensabile che il grafico si estenda a tutto il foglio** ma deve risultare leggibile)

[46] Raramente in laboratorio avrete a che fare con incertezze inferiori allo 0,1 % che implica al più 5 cifre significative

- usare solo scale multiple di 1, 2, 5 millimetri (evitare, se possibile, 4; MAI 3, 7, 9 o valori che richiedano una calcolatrice)
- se non viene richiesto dall'elaborazione grafica, non è necessario che le scale inizino dall'origine
- **riportare sugli assi il simbolo della grandezza, l'unità di misura, l'eventuale fattore 10^n**
- su ogni asse vanno riportate a intervalli regolari poche (5-10) tacche con l'indicazione del valore
- per non rendere difficoltosa ogni successiva elaborazione non riportare mai sugli assi i valori sperimentali delle misure effettive o collegare i punti tra loro o con gli assi o riportare l’unità della scala (la carte è millimetrata!)
- **riportare sul grafico la relazione (titolo del grafico) che ci si attende occorrere fra le quantità riportate sugli assi: deve essere nella forma Y = pX+q con gli stessi simboli e unità di misura utilizzati per gli assi e, nella relazione, nel testo e nelle tabelle.**

ELABORAZIONE GRAFICA va effettuata ... sul grafico.

Una volta graficati la serie delle N coppie di punti corrispondenti alle misure X_i ,Y_i (punti sperimentali) tracciamo la retta che si ritiene che passi meglio[47] tra essi (all'interno di questo corso studieremo solo andamenti lineari); essa è una ottima approssimazione di quanto potremmo ottenere a partire dal metodo dei minimi quadrati.
Da questo momento in poi dovrà essere dimenticata l'esistenza dei singoli punti e la migliore rappresentazione del fenomeno studiato sarà la retta che abbiamo tracciato.
Per la misura della sua pendenza si prendano due punti su di essa quanto più distanti possibile al fine di minimizzare l'effetto degli errori di lettura delle coordinate dal grafico. Evidenziare, ad esempio cerchiandoli, i due punti e si riportino i valori delle coordinate [x1, y1] e [x2, y2] (con le unità di misura!) al fine di calcolare la pendenza come rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse: $p \approx [y2 - y1] / [x2 - x1]$.
L'intercetta q si legge direttamente dal grafico.

ELABORAZIONE STATISTICA

.

Mediante uno strumento di calcolo elaborare i dati con le formule del metodo dei minimi quadrati per ricavare le misure di p_s e q_s con le loro incertezze. Fare attenzione a non invertire gli assi, e a non inserire i dati che sono stati scartati dall’elaborazione grafica (avendone preventivamente informato il docente)

VALIDAZIONE DEI MINIMI QUADRATI

Verificare che i parametri della retta graficata e di quella dei minimi quadrati siano compatibili: dovrebbero differire di pochi percento. Le differenze potrebbero essere notevoli nel caso di parametri quasi nulli (rette orizzontali o passanti per l’origine): se il denominatore è quasi nullo lo scarto relativo diverge. In questo caso considerare la previsione dei minimi quadrati e riportarla sul grafico per verificare l’accorda fra i due metodi

[47] Teoricamente la retta non dovrebbe toccare nessun punto: se non ci fossero errori di misura sarebbero perfettamente allineati; poiché gli errori sono inevitabili le misure si discostano tutte dai valori veri!!!

formulario per l'elaborazione di dati sperimentali

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1,N} x_i}{N} \qquad \sigma_s(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,N} (x_i - \overline{X})^2}{N-1}} \qquad \sigma_s(\overline{X}) = \frac{\sigma_s(X)}{\sqrt{N}}$$

$$X_p = \frac{\sum_{i=1,N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1,N} \frac{1}{\sigma_i^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1,N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Medie

$$\Delta = X - m \qquad \Delta = X_1 - X_2$$

$$s = \frac{X - m}{m} \qquad s = \frac{X_1 - X_2}{\frac{X_1 + X_2}{2}}$$

$$t = \frac{X - m}{\sigma} \qquad t = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

confronti

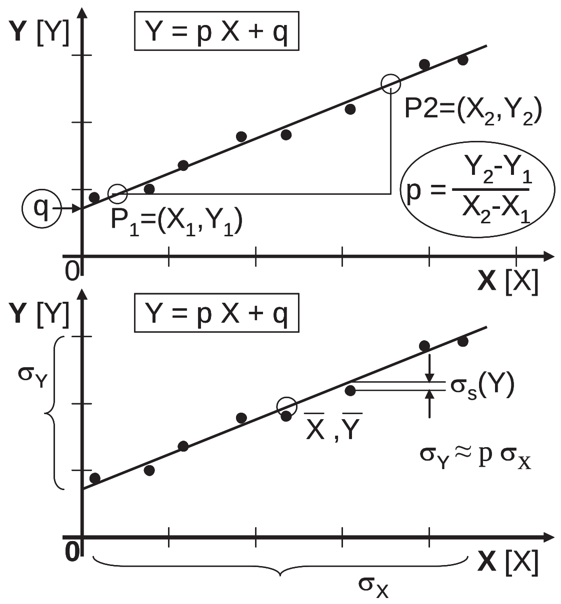
$$p = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

$$q = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{X})^2}{N}} \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \overline{Y})^2}{N}}$$

$$\sigma_s(Y) = \sqrt{\frac{\sum [y_i - (p\,x_i + q)]^2}{N-2}}$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_s(Y)}{\sqrt{N}\sigma_X} \qquad \sigma_q = \frac{\sigma_s(Y)}{\sqrt{N}} \sqrt{1 + \frac{\overline{X}^2}{\sigma_X^2}}$$



minimi quadrati

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) \qquad \sigma(Y) = \sqrt{\sum_{i=1,N} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \sigma(X_i) \right)^2}$$

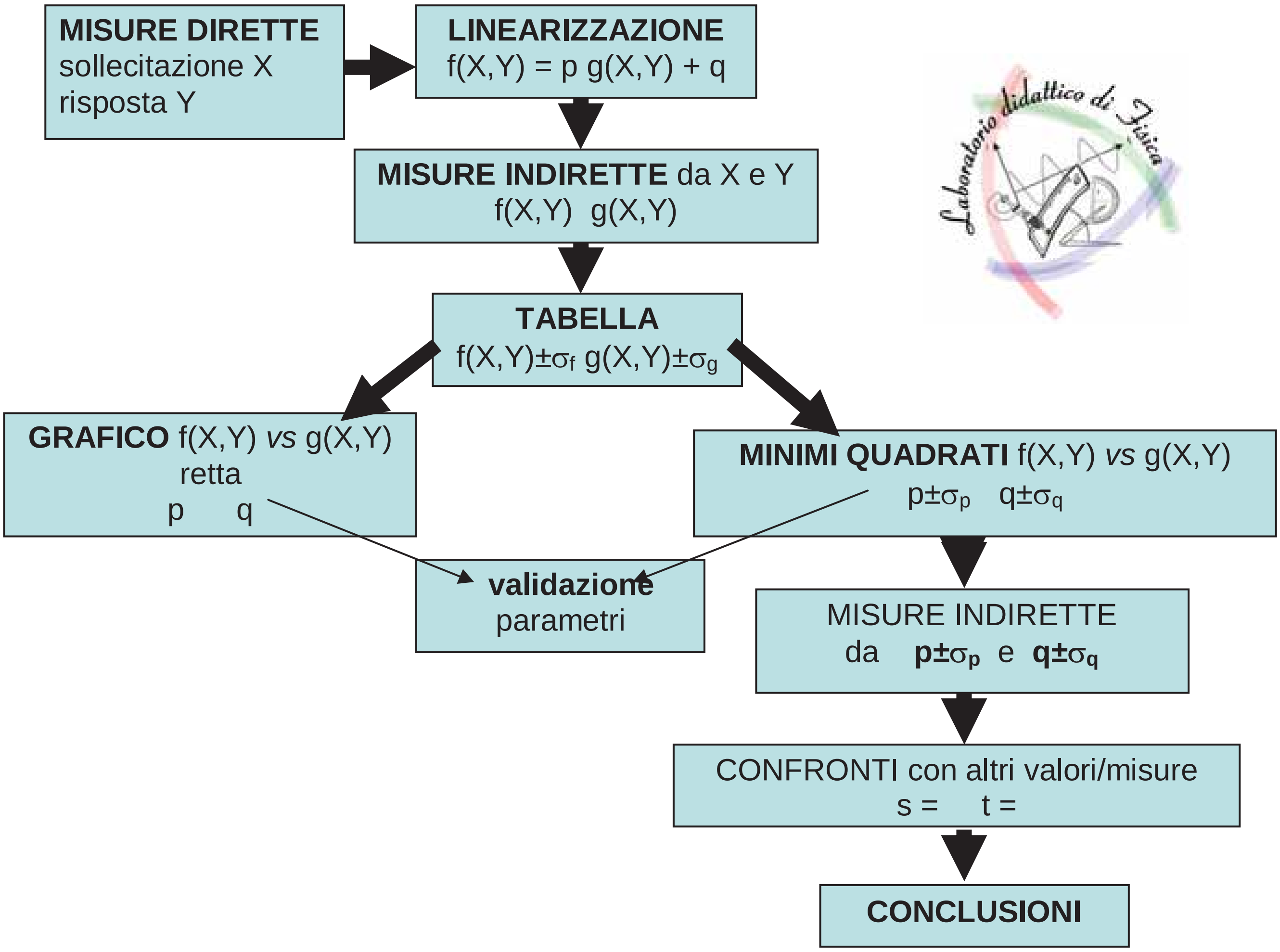
$$Y = c X_1^{p_1} X_2^{p_2} \ldots X_N^{p_N} \qquad \frac{\sigma(Y)}{Y} = \sqrt{\sum_{i=1,N} \left(p_i \frac{\sigma(X_i)}{X_i} \right)^2}$$

misure indirette

$T = (13{,}2 \pm 1{,}0) \times 10^3$ s — simbolo - unità di misura - fattore moltiplicativo

2 cifre significative, stesse cifre decimali

notazioni


MISURE DIRETTE
sollecitazione X
risposta Y
LINEARIZZAZIONE
f(X,Y) = p g(X,Y) + q
MISURE INDIRETTE da X e Y
f(X,Y) g(X,Y)
TABELLA
f(X,Y)±σ_f g(X,Y)±σ_g
GRAFICO f(X,Y) *vs* g(X,Y)
retta
p q
MINIMI QUADRATI f(X,Y) *vs* g(X,Y)
p±σ_p q±σ_q
validazione
parametri
MISURE INDIRETTE
da **p±σ_p** e **q±σ_q**
CONFRONTI con altri valori/misure
s = t =
CONCLUSIONI