INGEGNERIA MECCANICA - CANALE L-Z
ANALISI MATEMATICA II
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 08-07-2016

ESERCIZIO 1
Data la funzione 2π-periodica definita da

$$f(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi],$$

determinare: a) la serie di Fourier; b) l'insieme di convergenza puntuale e la somma della serie. c) Dedurre inoltre, dalla serie di Fourier, il valore della somma della serie numerica $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$.

SOLUZIONE
La funzione $f(x)$ è dispari, quindi $a_k = 0 \ \forall k = 0, 1, 2, \dots$ e si ha:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{k} (-1)^{k+1}.$$

Per quanto riguarda la convergenza puntuale (e quindi la somma) della serie di Fourier, poiché f è continua in $(-\pi, \pi)$ ma $f(-\pi) \neq f(\pi)$, si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

Il valore richiesto nel punto c) si ottiene facilmente sostituendo $x = \pi/2$ nella precedente espressione: si ha

$$\sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m, & k = 2m+1 \text{ dispari} \\ 0, & k = 2m \text{ pari}, \end{cases}$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{2m+1} = f(\pi/2) = \frac{\pi}{2},$$

e infine

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}.$$

ESERCIZIO 2
Studiare la continuità e la differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5-y^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

nel punto $(0,0)$.

SOLUZIONE
In coordinate polari si ha:

$$|(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \left| \frac{\rho^5 \cos^5\theta - \rho^5 \sin^5\theta}{\rho^4} \right| = \rho |\cos^5\theta - \sin^5\theta| \leq 2\rho \to 0 \text{ for } \rho \to 0$$

e quindi f è continua in $(0,0)$. Notiamo poi che per $x \neq 0$ si ha $f(x,0) = x$ e per $y \neq 0$ $f(0,y) = -y$; dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$. Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo quindi studiare il limite per $(x,y) \to (0,0)$ della funzione

$$\frac{\frac{x^5-y^5}{(x^2+y^2)^2} - x + y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-2x^3y^2 - xy^4 + x^4y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^{5/2}} \tag{1}$$

che in coordinate polari diventa

$$-2\cos^3\theta\sin^2\theta - \cos\theta\sin^4\theta + \cos^4\theta\sin\theta + 2\cos^2\theta\sin^3\theta.$$

Quindi il limite per $\rho \to 0$ di (1) dipende da θ ed f non è differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO 3
Utilizzando le formule di Green-Gauss, calcolare

$$\iint_D 2x^2y\,dxdy$$

dove D è la porzione del primo quadrante racchiusa dalle curve $x^2+y^2=4$ e $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$.

SOLUZIONE
Il dominio è delimitato dalle curve

$$\gamma_1 \begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ 0 \le x \le \sqrt{2} \end{cases} \qquad \gamma_2 \begin{cases} y = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \\ 0 \le x \le \sqrt{2} \end{cases} \qquad \gamma_3 \begin{cases} x = 0 \\ 0 \le y \le 2. \end{cases}$$

Possiamo quindi applicare le formule di Grenn-Gauss. Tenendo conto che $\frac{\partial}{\partial y}x^2y^2 = 2x^2y$ e dell'orientazione antioraria di ∂D, troviamo:

$$\begin{aligned}
\iint_D 2x^2y\,dxdy &= -\int_{+\partial D} x^2y^2dx \\
&= -\int_{+\gamma_1} x^2y^2dx - \int_{+\gamma_2} x^2y^2dx - \int_{+\gamma_3} x^2y^2dx \\
&= -\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^6}{2}dx - \int_{\sqrt{2}}^0 x^2(4-x^2)dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(4x^2 - x^4 - \frac{x^6}{2}\right) dx \\
&= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{14}\right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{136}{105}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4
Utilizzando il Teorema di Stokes, calcolare l'integrale $\oint_T \vec{F}\cdot\vec{v}dt$, dove $\vec{F} = (y, xz, xy)$ e T è il triangolo di vertici $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ e $(1,1,0)$.

SOLUZIONE
Sia Σ la superficie piana racchiusa dal triangolo T, che si trova sul piano $y+z=1$. Una sua

parametrizzazione è $z = 1 - y$, con $(x, y) \in D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$. La normale è $\vec{n} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{1+1}} = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e l'elemento d'area $d\sigma = \sqrt{2}dxdy$. Si ha poi

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & xz & xy \end{vmatrix} = -y\vec{j} + (z-1)\vec{k}.$$

Quindi sul piano $z = 1 - y$ si ha:

$$\vec{n} \cdot \ \mathrm{rot}\vec{F}|_{z=1-y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y + z - 1)|_{z=1-y} = -\sqrt{2}y$$

Infine, la formula di Stokes fornisce

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{v}dt &= \int_\Sigma \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}d\sigma = \iint_D -2ydxdy \\ &= \int_0^1 \int_x^1 -2ydydx = \int_0^1 (-1 + x^2)dx = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5

a) Si calcoli la lunghezza dell'arco di curva γ di equazioni:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t, \qquad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

b) Si calcoli l'ascissa curvilinea $s(t)$ e si effettui una riparametrizzazione della curva in funzione dell'ascissa curvilinea s.

SOLUZIONE

Poniamo

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

Allora

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{2 - 2\cos t} = 2\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2\sin\frac{t}{2}$$

per $t \in [0, 2\pi]$. Di conseguenza, essendo la curva regolare, la lunghezza dell'arco considerato è data da:

$$\ell(\gamma) = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 8.$$

Per l'ascissa curvilinea, invece, abbiamo:

$$s(t) = \int_0^t |\vec{r}\,'(\tau)|\, d\tau = 4 - 4\cos\frac{t}{2} = 8\sin^2\frac{t}{4},$$

da cui:

$$\sqrt{s} = 2\sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{4}\right| = 2\sqrt{2}\sin\frac{t}{4}$$

per $t \in [0, 2\pi]$. In questo intervallo, la funzione $\sin\frac{t}{4}$ risulta invertibile, quindi:

$$t = t(s) = 4\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{2}}.$$

Quindi la parametrizzazione con l'ascissa curvilinea è:

$$\begin{cases} x = 4 \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{2}} - \sin\left(4 \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{2}}\right) \\ y = 1 - \cos\left(4 \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{2}}\right), \end{cases} \qquad s \in [0, 8].$$