INGEGNERIA MECCANICA - CANALE L-Z
ANALISI MATEMATICA II
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 10-06-2016 - COMPITO A

ESERCIZIO 1
Studiare la convergenza assoluta, puntuale e totale della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, e^{(2k+1)(x+y)},$$

rappresentando, graficamente, gli insiemi di convergenza puntuale e totale. Calcolare esplicitamente la somma.

SOLUZIONE
Sia $t = e^{x+y}$, e si consideri la serie di potenze:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, t^{2k+1}.$$

Tale serie converge semplicemente e assolutamente quando $t \in (-1, 1)$ e totalmente in $[-r, r]$ per ogni numero $r \in (0, 1)$, conclusione che si può derivare facilmente calcolando il raggio di convergenza ($R = 1$). Per $t = \pm 1$ converge semplicemente (criterio di Leibniz) ma non assolutamente; a noi interesserà solo il caso $t = 1$.

Ricordando che la la serie in t è lo sviluppo di Maclaurin della funzione arctan:

$$\arctan t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, t^{2k+1},$$

possiamo calcolare agevolmente la somma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, e^{(2k+1)(x+y)} = \arctan e^{x+y}.$$

Poiché $t = e^{x+y}$, la serie data converge puntualmente per $e^{x+y} \in (0, 1]$, quindi nell'insieme $x + y \leq 0$, assolutamente in $x + y < 0$ e totalmente negli insiemi $x + y \leq \delta$ con $\delta < 0$.

ESERCIZIO 2
Calcolare

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

dove V è il volume delimitato dalla superficie $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ e dai piani $z = 0$, $z = -1$ ed $\vec{F} = \left(4xy^2, 2yz, 4zx^2\right)$.

SOLUZIONE
Si ha $\text{div}\vec{F} = 4x^2 + 2z + 4y^2$ e quindi, usando il teorema della divergenza e le coordinate

cilindriche,

$$\begin{aligned}\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma =& \iiint_V (4x^2 + 2z + 4y^2) dxdydz \\ =& \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \int_0^{1-z} (4\rho^2 + 2z)\rho d\rho dz d\theta \\ =& 2\pi \int_{-1}^0 \left[\rho^4 + z\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=1-z} dz \\ =& 2\pi \int_{-1}^0 \left[(z-1)^4 + z(1-z)^2\right] dz \\ =& 2\pi \left[\frac{1}{5}(z-1)^5 + \frac{1}{4}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{z^2}{2}\right]_{-1}^0 \\ =& \frac{287}{30}\pi.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3
Determinare il minimo e il massimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 1$ nel triangolo T del piano che ha come vertici i punti $(0,0)$, $(1,2)$ e $(2,0)$.

SOLUZIONE
La funzione è continua, l'insieme chiuso e limitato e quindi massimo e minimo assoluti esistono. L'equazione $\nabla f = 0$ si traduce nel sistema

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $(1,1)$, dove $f(1,1) = -2$. Dall'analisi del determinante Hessiano si vede facilmente che $(1,1)$ è un punto di minimo relativo.

Sulla base del triangolo troviamo la funzione $\varphi(x) = f(x,0) = x^2 - 2x + 1 \equiv (x-1)^2$, $0 \leq x \leq 2$, che ha un minimo relativo per $x = 1$, dove $\varphi(1) = 0$. Inoltre $f(0,0) = \varphi(0) = 1 = f(2,0) = \varphi(2)$.

Sul lato sinistro troviamo la funzione $\psi(y) = f(y/2, y) = \frac{9}{4}y^2 - 5y + 1$, $0 \leq y \leq 2$, che ha un minimo relativo per $y = \frac{10}{9}$, dove $\psi(10/9) = -\frac{16}{9}$. Inoltre $\psi(2) = f(1,2) = 0$.

Sul lato destro troviamo nuovamente la funzione $\psi(y) = f(2 - y/2, y) = \frac{9}{4}y^2 - 5y + 1$, $0 \leq y \leq 2$.

In conclusione, il minimo assoluto vale -2 ed è assunto nel punto $(1,1)$, il massimo assoluto vale 1 ed è assunto nei punti $(0,0)$ e $(2,0)$.

OSSERVAZIONE 1 Scrivendo la funzione nella forma $f(x,y) = (x-1)^2 + 2(y-1)^2 - 2$, si vede subito che $(1,1)$ è il punto di minimo assoluto .

OSSERVAZIONE 2 Il dominio è simmetrico rispetto alla retta $x = 1$ e la funzione pari rispetto a tale retta, e questo spiega perché sui due lati troviamo la stessa $\psi(y)$.

ESERCIZIO 4
Determinare se la seguente forma differenziale

$$2y^2\cos^2 x dx + y(2x+\sin 2x)dy$$

è esatta e in caso affermativo calcolare una primitiva.

SOLUZIONE
Ponendo $F_1(x,y) = 2y^2\cos^2 x$ e $F_2 = y(2x+\sin 2x)$ troviamo che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 4y\cos^2 x, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2y(1+\cos 2x)$$

ed essendo $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$, la forma è chiusa. Essendo il suo insieme di definizione tutto $\mathbb{R}^2$, è anche esatta. Per calcolare la primitiva f integriamo il primo coefficiente:

$$f(x,y) = \int 2y^2\cos^2 x dx = y^2\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right) + \varphi(y)$$

e imponendo $\frac{\partial f}{\partial y} = y(2x+\sin 2x)$ troviamo l'equazione

$$y(2x+\sin 2x) + \varphi'(y) = y(2x+\sin 2x)$$

per cui possiamo prendere $\varphi \equiv 0$ ed $f(x,y) = y^2\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$.

ESERCIZIO 5
Data la curva di equazione

$$\begin{cases} x = 1-\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t, \qquad\qquad t\in[0,2\pi] \\ z = \cos t \end{cases}$$

calcolare i versori tangente, normale e binormale, la curvatura e la torsione.

SOLUZIONE
Poniamo $\mathbf{r}(t) = (1-\cos t, \sqrt{2}\sin t, \cos t)$, da cui:

$$\mathbf{r}'(t) = (\sin t, \sqrt{2}\cos t, -\sin t), \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}, \quad \mathbf{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)$$

dove $\mathbf{T}(t)$ il versore tangente. Per calcolare il versore normale bisogna prima scrivere il vettore $\mathbf{T}'(t)$ e il suo modulo. Ovvero:

$$\mathbf{T}'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, -\sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right), \qquad \left|\mathbf{T}'(t)\right| = 1,$$

da cui si ottiene facilmente l'espressione del versore normale:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, -\sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right).$$

Essendo poi

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin t & \sqrt{2}\cos t & -\sin t \\ \cos t & -\sqrt{2}\sin t & -\cos t \end{vmatrix} = (\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{k})$$

la curvatura è data dalla formula:

$$\frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ed è quindi costante.

Poiché $x = 1 - z$, la curva è piana e quindi la torsione è nulla e il versore binormale costante. Quindi:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

INGEGNERIA MECCANICA - CANALE L-Z
ANALISI MATEMATICA II
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 10-06-2016 - COMPITO B

ESERCIZIO 1
Studiare la convergenza assoluta, puntuale e totale della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, e^{(2k+1)(2x+y)},$$

rappresentando, graficamente, gli insiemi di convergenza puntuale e totale. Calcolare esplicitamente la somma.

SOLUZIONE
Sia $t = e^{2x+y}$, e si consideri la serie di potenze:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, t^{2k+1}.$$

Tale serie converge semplicemente e assolutamente quando $t \in (-1, 1)$ e totalmente in $[-r, r]$ per ogni numero $r \in (0, 1)$, conclusione che si può derivare facilmente calcolando il raggio di convergenza ($R = 1$). Per $t = \pm 1$ converge semplicemente (criterio di Leibniz) ma non assolutamente; a noi interesserà solo il caso $t = 1$.

Ricordando che la la serie in t è lo sviluppo di Maclaurin della funzione arctan:

$$\arctan t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, t^{2k+1},$$

possiamo calcolare agevolmente la somma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, e^{(2k+1)(2x+y)} = \arctan e^{2x+y}.$$

Poiché $t = e^{2x+y}$, la serie data converge puntualmente per $e^{2x+y} \in (0, 1]$, quindi nell'insieme $2x + y \leq 0$, assolutamente in $2x + y < 0$ e totalmente negli insiemi $2x + y \leq \delta$ con $\delta < 0$.

ESERCIZIO 2
Calcolare

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

dove V è il volume delimitato dalla superficie $z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ e dai piani $z = 0$, $z = 1$ ed $\vec{F} = \left(-2xz, 4yx^2, 4zx^2\right)$.

SOLUZIONE

Si ha div$\vec{F} = -2z + 8x^2$ e quindi, usando il teorema della divergenza e le coordinate cilindriche,

$$\begin{aligned}
\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_V (-2z + 8x^2) dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+z} (8\rho^2 \cos^2\theta - 2z)\rho d\rho dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[2\rho^4 \cos^2\theta - z\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=1+z} dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[2(z+1)^4 \cos^2\theta - z(1+z)^2\right] dz d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{5}(z+1)^5 \cos^2\theta - \frac{1}{4}z^4 - \frac{2}{3}z^3 - \frac{z^2}{2}\right]_0^1 d\theta \\
&= \frac{287}{30}\pi.
\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE Il risultato finale è uguale a quello dell'esercizio corrispondente nel compito A perché: a) per ragioni di simmetria $\iiint_V x^2 dxdydz = \iiint_V y^2 dxdydz$, e quindi nell'integrale triplo si può sostituire $8x^2$ con $4\rho^2$; b) tramite la sostituzione $z \to -z$ si può rasformare l'integrale triplo in quello del compito A (e viceversa).

ESERCIZIO 3
Determinare il minimo e il massimo assoluto della funzione $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1$ nel triangolo T del piano che ha come vertici i punti $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(0, 2)$.

SOLUZIONE
La funzione è continua, l'insieme chiuso e limitato e quindi massimo e minimo assoluti esistono. L'equazione $\nabla f = 0$ si traduce nel sistema

$$\begin{cases} 4x - 2 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $(1, 1)$, dove $f(1, 1) = -2$. Dall'analisi del determinante Hessiano si vede facilmente che $(1, 1)$ è un punto di minimo relativo.

Sul lato sull'asse y troviamo la funzione $\varphi(y) = f(0, y) = y^2 - 2y + 1 \equiv (y - 1)^2$, $0 \leq y \leq 2$, che ha un minimo relativo per $y = 1$, dove $\varphi(1) = 0$. Inoltre $f(0, 0) = \varphi(0) = 1 = f(0, 2) = \varphi(2)$.

Sul lato obliquo inferiore troviamo la funzione $\psi(x) = f(x, x/2) = \frac{9}{4}x^2 - 5x + 1$, $0 \leq x \leq 2$, che ha un minimo relativo per $x = \frac{10}{9}$, dove $\psi(10/9) = -\frac{16}{9}$. Inoltre $\psi(2) = f(2, 1) = 0$.

Sul lato obliquo superiore troviamo nuovamente la funzione $\psi(x) = f(x, 2 - x/2) = \frac{9}{4}x^2 - 5x + 1$, $0 \leq x \leq 2$.

In conclusione, il minimo assoluto vale -2 ed è assunto nel punto $(1, 1)$, il massimo assoluto vale 1 ed è assunto nei punti $(0, 0)$ e $(0, 2)$.

OSSERVAZIONE 1 Scrivendo la funzione nella forma $f(x, y) = 2(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 2$, si vede subito che $(1, 1)$ è il punto di minimo assoluto.

OSSERVAZIONE 2 Il dominio è simmetrico rispetto alla retta $y = 1$ e la funzione pari rispetto a tale retta, e questo spiega perché sui due lati obliqui troviamo la stessa $\psi(x)$.

ESERCIZIO 4
Determinare se la seguente forma differenziale

$$2y^2 \sin^2 x dx + y(2x - \sin 2x)dy$$

è esatta e in caso affermativo calcolare una primitiva.

SOLUZIONE
Ponendo $F_1(x, y) = 2y^2 \sin^2 x$ e $F_2 = y(2x - \sin 2x)$ troviamo che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 4y \sin^2 x, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2y(1 - \cos 2x)$$

ed essendo $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$, la forma è chiusa. Essendo il suo insieme di definizione tutto $\mathbb{R}^2$, è anche esatta. Per calcolare la primitiva f integriamo il primo coefficiente:

$$f(x, y) = \int 2y^2 \sin^2 x dx = y^2 \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + \varphi(y)$$

e imponendo $\frac{\partial f}{\partial y} = y(2x - \sin 2x)$ troviamo l'equazione

$$y(2x - \sin 2x) + \varphi'(y) = y(2x - \sin 2x)$$

per cui possiamo prendere $\varphi \equiv 0$ ed $f(x, y) = y^2 \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)$.

ESERCIZIO 5
Data la curva di equazione

$$\begin{cases} x = 1 - \sin t \\ y = \sqrt{2} \cos t, \qquad\qquad t \in [0, 2\pi] \\ z = \sin t \end{cases}$$

calcolare i versori tangente, normale e binormale, la curvatura e la torsione.

SOLUZIONE
Poniamo $\mathbf{r}(t) = (1 - \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sin t)$, da cui:

$$\mathbf{r}'(t) = (-\cos t, -\sqrt{2} \sin t, \cos t), \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}, \quad \mathbf{T}(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right)$$

dove $\mathbf{T}(t)$ il versore tangente. Per calcolare il versore normale bisogna prima scrivere il vettore $\mathbf{T}'(t)$ e il suo modulo. Ovvero:

$$\mathbf{T}'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, -\cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right), \qquad \left| \mathbf{T}'(t) \right| = 1,$$

da cui si ottiene facilmente l'espressione del versore normale:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, - \cos t, - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right).$$

Essendo poi

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ - \cos t & -\sqrt{2} \sin t & \cos t \\ \sin t & -\sqrt{2} \cos t & - \sin t \end{vmatrix} = (-\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{k})$$

la curvatura è data dalla formula:

$$\frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ed è quindi costante.

Poiché $x = 1 - z$, la curva è piana e quindi la torsione è nulla e il versore binormale costante. Quindi:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$