



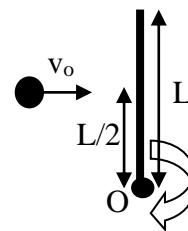
# FISICA

A.A. 2023-2024

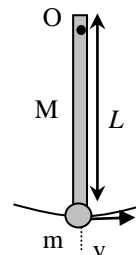
Ingegneria Gestionale

10° prova del 22 Aprile 2024

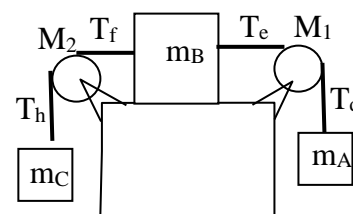
1. Una sottile barretta, omogenea di massa  $M=1\text{kg}$  e lunghezza  $L=30\text{cm}$  può ruotare senza attrito intorno ad un asse fisso orizzontale passante per  $O$ . Inizialmente si trova in quiete nella posizione di equilibrio instabile in figura. Essa viene colpita centralmente da un proiettile di massa  $m=150\text{g}$  a velocità  $v_o=200\text{m/s}$  come in figura. Nell'ipotesi che il proiettile rimanga conficcato nella barretta si calcoli la velocità del centro di massa quando transita nel punto più basso della sua traiettoria (nel punto di equilibrio stabile)



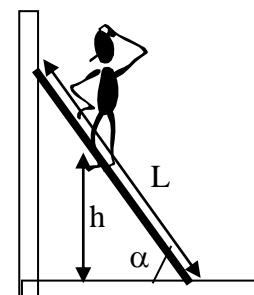
2. Un pendolo composto è formato da un'asta rigida omogenea di massa  $M=4\text{kg}$ , di lunghezza  $L=40\text{cm}$ , libera di ruotare intorno al cardine  $O$ . All'estremo della sbarra è anche alloggiata una piccola massa  $m=1\text{kg}$ . Supponendo di imprimere una piccola velocità  $v=0.5\text{m/s}$  all'estremo libero dell'asta, determinare l'angolo massimo di oscillazione del sistema e fornire una stima del tempo necessario per tornare nella posizione verticale di partenza. [Suggerimento:  $I_{\text{asta}}=ML^2/3$ ]



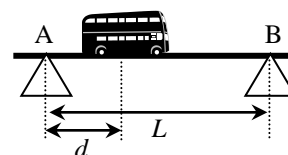
3. Tre blocchi di massa  $m_A=10\text{ kg}$ ,  $m_B=5\text{ kg}$ ,  $m_C=3\text{ kg}$ , sono collegati come in figura da due funi inestensibili e di massa trascurabile che passano attraverso due pulegge di raggio  $R$  e di massa rispettivamente  $M_1=1.5\text{ kg}$  e  $M_2=2.5\text{ kg}$ . Sapendo che la massa  $m_B$  si muove senza attrito sul piano di appoggio, determinare l'accelerazione comune con cui si muove il gruppo. [Il momento di inerzia di una puleggia rispetto al proprio asse vale  $I=MR^2/2$ ]. Determinare inoltre le 4 tensioni delle funi.



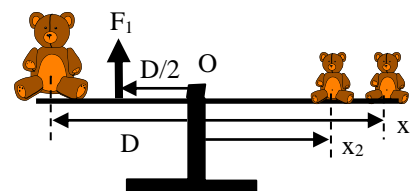
4. Un operaio di massa  $M=70\text{kg}$  sale su di una scala di massa  $m=10\text{kg}$  e di lunghezza  $L=3\text{m}$  appoggiata ad una parete disposta come in figura. Considerando il pavimento scabro con coefficiente di attrito statico  $\mu_s = 0.5$ , si calcoli qual è l'altezza massima  $h$  cui può salire senza rischio di cadere insieme alla scala. Si assuma  $\alpha=60^\circ$ .



5. Il ponte in figura è lungo  $L=50\text{m}$  ed ha una massa  $M$  di 100 tonnellate poggiate sui due pilastri  $A$  e  $B$ . Sul ponte si trova ad una distanza  $d=10\text{m}$  dal pilastro  $A$  un autobus di massa  $m$  di 20 tonnellate. Determinare le forze agenti sui punti di appoggio  $A$  e  $B$  necessarie perché il sistema sia stabile.



6. Un dondolo è costituito da una barra incernierata sul fulcro  $O$ . Due piccoli orsetti ciascuno di massa  $m=20\text{ kg}$  sono disposti sulla barra alle distanze  $x_1=2\text{m}$ ,  $x_2=1.5\text{m}$  dal fulcro. Un orso di massa elevata  $M=60\text{ kg}$  è posizionato dalla parte opposta alla distanza  $D=1.2\text{m}$  dal fulcro  $O$ . Determinare la forza  $F_1$  che è necessario applicare alla distanza  $D/2$  dal fulcro per bilanciare completamente il dondolo. Calcolare infine la forza di reazione esercitata dal fulcro  $O$ .



7. Un cilindro ed una sfera entrambi di raggio  $R$  e di massa  $m$ , posti sulla sommità  $h=1\text{m}$  di un piano inclinato di angolo  $\theta=30^\circ$ , rotolano senza strisciare sino a valle. Calcolare le rispettive velocità finali ed i tempi rispettivamente impiegati. (Si assuma  $I_{\text{cil}} = mR^2/2$ ,  $I_{\text{sfera}} = 2mR^2/5$ )

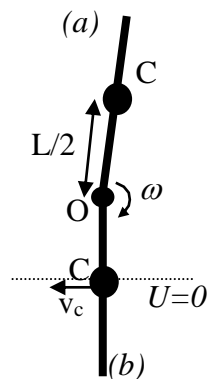


# FISICA

A.A. 2023-2024

Ingegneria Gestionale  
Soluzioni della 10° prova

1. L'urto è anche in questo caso perfettamente anelastico. Ma il moto della barretta dopo l'urto è questa volta di pura rotazione intorno all'asse per il cardine  $O$ . Considerando il sistema complessivo, nell'urto si sviluppano solo forze interne e forze sul cardine  $O$ . Il momento di queste forze calcolato sull'asse per  $O$  è quindi nullo per cui si conserva il momento della quantità di moto del sistema. Prima dell'urto  $b_o = mv_o L/2$  mentre dopo l'urto  $b_o = I_o \omega$  dove  $I_o = m(L/2)^2 + ML^2/3 = 0.033 \text{kgm}^2$ . Dalla conservazione di  $b_o$  si ottiene la velocità angolare iniziale  $\omega_o = mv_o L/2I_o = 6v_o m/(3m + 4M)L = 134.8 \text{rad/s}$ . Appena dopo l'urto la barra si sposta dalla posizione di equilibrio instabile (a) e si rovescia oscillando intorno alla posizione di equilibrio stabile (b). Durante la rotazione l'energia meccanica totale si conserva per cui  $U_a + T_a = U_b + T_b$ . Fissando come riferimento dell'energia potenziale quello dello stato (b), si ha ovviamente  $U_b = 0$  mentre  $U_a = (m+M)gL$  (dopo l'urto nel centro di massa si concentra la massa complessiva  $m+M$ ). L'espressione dell'energia cinetica di pura rotazione intorno ad  $O$  è invece  $T = I_o \omega^2/2$ . Imponendo la conservazione dell'energia meccanica si ha quindi  $I_o \omega_o^2/2 + (m+M)gL = I_o \omega_b^2/2$  da cui la velocità angolare in (b) vale  $\omega_b = \sqrt{\omega_o^2 + 2(m+M)gL/I_o} = 135.5 \text{rad/s}$ .



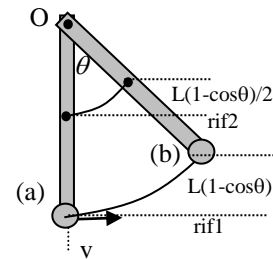
## 2. Calcolo energia meccanica nello stato (a)

Il sistema è dotato di un momento di inerzia complessivo dato da:

$$I_{tot} = I_{asta} + I_m = \frac{ML^2}{3} + mL^2 = \frac{L^2}{3}(M + 3m)$$

Assumendo nulla l'energia potenziale complessiva nello stato (a), l'energia meccanica coincide con l'energia cinetica di rotazione

$$E_{ma} = T_a = \frac{1}{2} I_{tot} \omega_a^2 = \frac{1}{2} I_{tot} \left( \frac{v}{L} \right)^2 = \frac{1}{6} (M + 3m) v^2$$



## Calcolo energia meccanica nello stato (b)

Essendo nulla l'energia cinetica nello stato (b), l'energia meccanica diviene

$$E_{mb} = U_b = Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) + mgL(1 - \cos \theta) = \frac{gL}{2} (M + 2m)(1 - \cos \theta)$$

dove sono stati distinti i riferimenti per le masse  $m$ ,  $M$

Infine imponendo la conservazione dell'energia meccanica  $E_{ma} = E_{mb}$

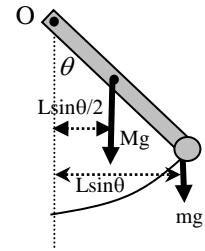
si può calcolare l'**angolo massimo di oscillazione**  $\theta = \arccos \left[ 1 - \frac{v^2}{3gL} \left( \frac{M + 3m}{M + 2m} \right) \right] = 12^\circ 47'$

### Calcolo del periodo di oscillazione:

Quando il pendolo composto è fuori dalla sua posizione di equilibrio, il momento delle due forze peso tende a far ruotare il sistema verso la posizione di equilibrio

Applicando la seconda equazione cardinale  $M_o^{ext} = \frac{db_o}{dt} = I_{tot} \frac{d^2\theta}{dt^2}$

dove  $M_o^{ext} = -MgL \sin \theta / 2 - mgL \sin \theta \cong -\frac{gL}{2}(M + 2m)\theta$

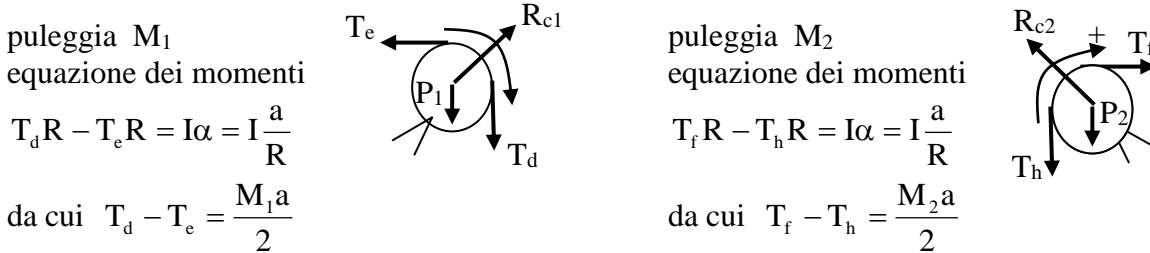
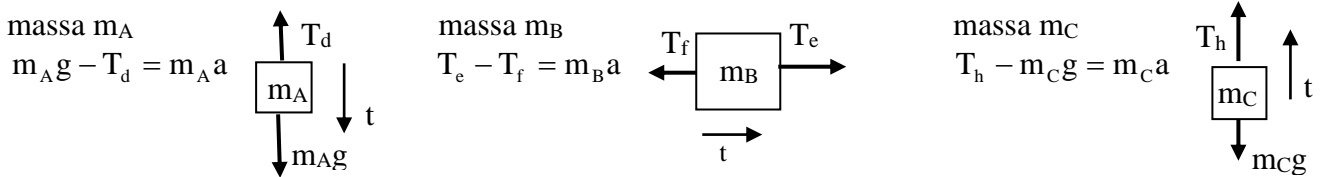


L'equazione differenziale è quindi  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{gL(M + 2m)}{2I_{tot}}\right)\theta = 0$  che prevede oscillazioni di periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2I_{tot}}{gL(M + 2m)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g} \left(\frac{M + 3m}{M + 2m}\right)} = 1.12 \text{ s.}$$

Il tempo necessario per tornare in posizione verticale è quindi  $T/2 = 0.56 \text{ s}$

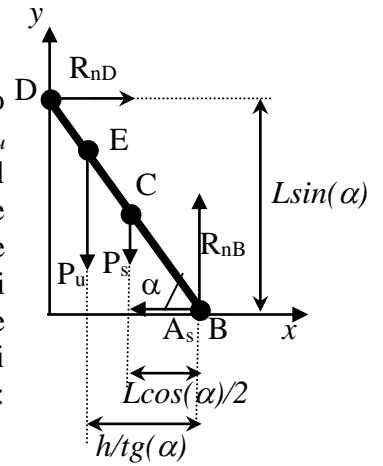
### 3. Studio delle forze agenti su ciascun elemento del sistema



sommando tutte le relazioni si ottiene  $a = g \frac{m_A - m_C}{m_A + m_B + m_C + \frac{M_1}{2} + \frac{M_2}{2}} = \frac{7}{20} g = 3.43 \text{ m/s}^2$

### Facoltativo:

$$T_d = m_A(g - a) = 63.7 \text{ N}, \quad T_e = T_d - \frac{M_1 a}{2} = 61.1 \text{ N}, \quad T_f = T_e - m_B a = 44 \text{ N}, \quad T_h = T_f - \frac{M_2 a}{2} = 39.7 \text{ N}$$



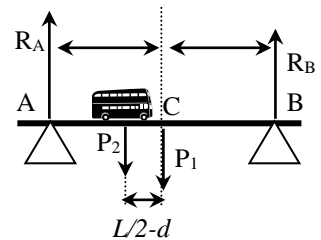
4. Le forze agenti sul sistema sono le seguenti: il peso della scala  $P_s$  applicato nel baricentro  $C$  (a metà della lunghezza della scala), il peso dell'uomo  $P_u$  applicato sulla scala nel punto  $E$  (ad altezza  $h$  dal suolo), la reazione del pavimento applicata nel punto di contatto  $B$  che si compone di una reazione normale  $R_{nB}$  e di una forza di attrito statico orizzontale  $A_s$ , ed infine la reazione della parete verticale  $R_{nD}$  applicata nel punto di contatto  $D$ . In condizioni statiche la somma vettoriale di tutte le forze deve annullarsi (1<sup>a</sup> equazione cardinale) come anche la somma di tutti i momenti delle forze deve annullarsi (2<sup>a</sup> equazione cardinale). Scomponiamo la 1<sup>a</sup> equazione cardinale lungo  $x$ ,  $y$ :

$$\begin{cases} \hat{x} & R_{nD} - A_s = 0 \\ \hat{y} & R_{nB} - (P_u + P_s) = 0 \end{cases} \text{ da cui ricaviamo il valore di } R_{nB} = P_u + P_s \text{ ed una}$$

condizione sull'attrito statico  $A_s = R_{nD}$  insufficiente però per determinarlo (1 equazione in 2 incognite!). L'attrito  $A_s$  viene infatti determinato grazie alla 2<sup>a</sup> equazione cardinale applicata per semplicità ad un asse orizzontale per  $B$ . In questo caso contribuiranno solo i momenti della reazione della parete verticale  $R_{nD}$  con braccio  $L \sin \alpha$  da  $B$ , del peso della scala  $P_s$  con braccio  $L/2 \cos \alpha$  da  $B$ , ed infine del peso dell'uomo  $P_u$  con braccio  $h \cot \alpha$  da  $B$  (gli altri 2 momenti, di braccio nullo, sono nulli). La condizione statica impone che  $M_B = P_u h \cot \alpha + P_s L \cos \alpha / 2 - R_{nD} L \sin \alpha = 0$  (si noti che il momento di  $R_{nD}$  è negativo perché tenderebbe a far ruotare la scala in senso orario) da cui si ricava  $A_s = R_{nD} = P_u h / (L \sin \alpha \cdot \tan \alpha) + P_s / 2 \tan \alpha$ . L'attrito trovato è quello richiesto dalla condizione di staticità. Esso può essere fornito solo se è inferiore al valore massimo  $A_s \leq A_{\max} = \mu_s R_{nB} = \mu_s (P_u + P_s)$ . Il caso limite  $A_s = A_{\max}$  corrisponde all'altezza  $h_{\max}$  da cui si

$$\text{ricava } h_{\max} = L \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \left[ \mu_s + \frac{P_s}{P_u} \left( \mu_s - \frac{1}{2 \tan \alpha} \right) \right] = 3 \frac{3/4}{1/2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{10}{70} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \right] = 2.386 \text{ m}$$

5. Le forze agenti sul ponte sono: la forza peso del ponte  $P_1 = Mg$  applicata nel suo baricentro  $C$ , la forza peso dell'autobus  $P_2 = mg$  applicata in un punto a distanza  $L/2 - d$  dal punto  $C$ , le reazioni dei due pilastri  $R_A$  ed  $R_B$  entrambe a distanza  $L/2$  da  $C$ . Il sistema è in equilibrio quando sono nulle contemporaneamente la somma delle forze (1<sup>a</sup> equazione cardinale) e la somma dei momenti (2<sup>a</sup> equazione cardinale). Dalla prima proiettata lungo la verticale otteniamo  $P_1 + P_2 - R_A - R_B = 0$ , mentre dalla seconda applicata rispetto al punto  $C$  si ottiene  $M_{R_A} + M_{R_B} + M_{P_2} + M_{P_1} = 0$



dove  $M_{P_1} = 0$  perché  $P_1$  è applicato in  $C$ ,  $M_{R_A} = -R_A (L/2) < 0$  (termine negativo perché la forza tenderebbe a far ruotare il ponte in senso orario), mentre  $M_{R_B} = R_B (L/2)$  ed  $M_{P_2} = P_2 (L/2 - d)$ .

Combinando le equazioni si ottiene (1<sup>a</sup> equazione cardinale)  $R_A + R_B = (M + m)g$ , e (2<sup>a</sup> equazione cardinale)  $R_A - R_B = mg [(L/2 - d) / L/2] = mg(1 - 2d/L)$ . Sommando e sottraendo si ottengono i valori  $R_A = Mg/2 + mg(1 - d/L) = 6.468 \cdot 10^5 \text{ N}$  mentre  $R_B = Mg/2 + mg(d/L) = 5.292 \cdot 10^5 \text{ N}$ .

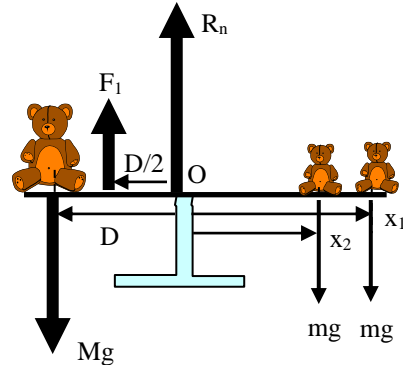
6. Per la statica del dondolo è necessario che siano contemporaneamente nulle le due equazioni

cardinali  $\begin{cases} F = 0 \\ M_O = 0 \end{cases}$  (il momento viene calcolato per semplicità rispetto ad un asse per il fulcro. La

convenzione adottata è che hanno momento positivo le forze che produrrebbero rotazioni antiorarie rispetto al fulcro)

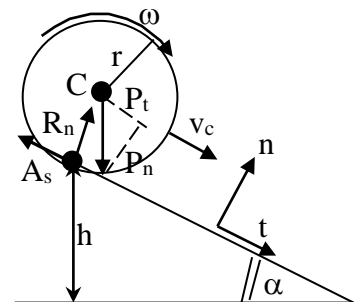
$$\begin{cases} R_n + F_1 - Mg - mg - mg = 0 \\ MgD - F_1 D/2 - mgx_1 - mgx_2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene  $\begin{cases} F_1 = 2g \frac{MD - m(x_1 + x_2)}{D} = 32.7 \text{ N} \\ R_n = (M + 2m)g - F_1 = 947 \text{ N} \end{cases}$



7. Le forze agenti sul corpo sono: la forza peso  $P=mg$  applicata nel baricentro  $C$ , che può pensarsi scomposta nelle due componenti lungo i due assi normale e tangenziale  $P_t = P \sin \alpha$  e  $P_n = P \cos \alpha$ , la reazione normale  $R_n$  applicata sul punto di contatto e diretta lungo  $n$ , e la forza di attrito statico  $A_s$  applicata sul punto di contatto e contraria al moto lungo  $t$ . (si ricorda che l'attrito è statico perché nel puro rotolamento il punto di contatto è fermo!). La 1<sup>a</sup> equazione cardinale

proiettata lungo gli assi  $n, t$  si scrive  $\begin{cases} \hat{t} \{ P_t - A_s = ma_c \\ \hat{n} \{ R_n - P_n = 0 \end{cases}$  da cui ricaviamo la



reazione normale  $R_n = P_n = mg \cos \alpha$ . Per ricavare l'accelerazione del centro

di massa  $a_c$  è però indispensabile applicare la 2<sup>a</sup> equazione cardinale proiettata sull'asse orizzontale per il centro di massa  $C$ ; l'unico momento non nullo è il momento della forza di attrito che mette in rotazione il corpo  $M_C = A_s r = I_c d\omega/dt$  (si noti che per semplicità è stata adottata la convenzione per cui  $\omega$  è positivo per rotazioni orarie) essendo  $I_c$  il momento di inerzia rispetto al centro di massa. La condizione di rotolamento impone che  $v_c(t) = \omega(t) \cdot r$  che vale anche derivando nel tempo ambo i membri per cui  $a_c(t) = \frac{d\omega}{dt} \cdot r$  da cui l'attrito vale  $A_s = a_c (I_c / r^2)$ . Sostituendo questa

espressione nella 1<sup>a</sup> equazione cardinale si ottiene  $ma_c = mg \sin \alpha - a_c (I_c / r^2)$  da cui l'accelerazione del centro di massa è costante  $a_c = g \sin \alpha / (1 + I_c / mr^2)$ . Il moto è quindi

uniformemente accelerato con  $v_c(t) = a_c t$  e spazio percorso  $s(t) = a_c t^2 / 2$ . Il tempo  $t^*$  per percorrere lo spazio fino alla base del piano  $L = h / \sin \alpha$  è quindi

$$t^* = \sqrt{2L/a_c} = \sqrt{2h / (g \sin^2 \alpha (1 + I_c / mr^2))} = \begin{cases} t_{cilindro} = 1.11 \text{ s} \\ t_{sfera} = 1.07 \text{ s} \end{cases} \text{ mentre le velocità finali sono}$$

$$v_C = \sqrt{2gh / (1 + \frac{I_c}{mr^2})} = \begin{cases} v_{cilindro} = 3.61 \text{ m/s} \\ v_{sfera} = 3.74 \text{ m/s} \end{cases} . \text{ La sfera arriva prima perché ha un momento d'inerzia}$$

minore e l'energia cinetica della sfera viene ripartita più efficientemente nell'energia traslazionale del centro di massa più che nell'energia rotazionale intorno al centro di massa.