



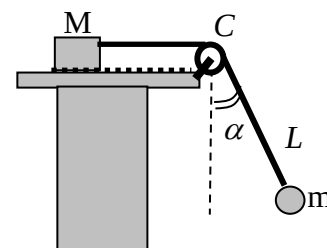
FISICA

A.A. 2024-2025

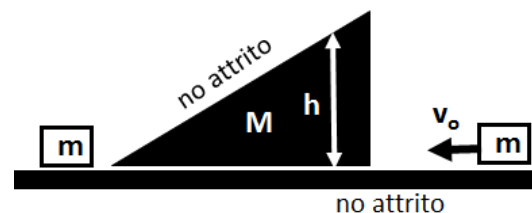
Ingegneria Gestionale

10° prova del 24 Aprile 2025

1. Un corpo di massa $M=5\text{kg}$ è fermo su un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito statico $\mu_s=0.4$. Ad esso è collegata, mediante una fune insensibile e di massa trascurabile una sferetta di massa $m=1.5\text{kg}$. La fune pende per un tratto L dal bordo del piano. La sferetta viene spostata di un angolo α , rispetto alla verticale, e viene lasciata oscillare. Si determini il massimo valore di α per il quale il corpo M si mantiene fermo.

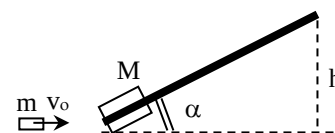


2. Un blocco di massa $m=10\text{ kg}$ si muove alla velocità costante $v_0=3\text{m/s}$ lungo un piano orizzontale liscio. In un certo istante il blocco urta elasticamente un cuneo di massa $M=20\text{ kg}$ inizialmente fermo sul piano. Dopo l'urto il cuneo prende a muoversi ed incontra un secondo blocco anch'essa di massa $m=10\text{ kg}$ che risale lungo il lato inclinato liscio del cuneo fino a raggiungere la quota massima h (rispetto al piano orizzontale).



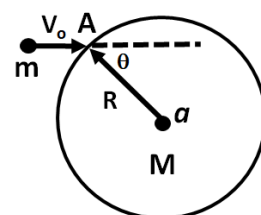
Determinare la massima altezza h raggiunta e le velocità del sistema in quella situazione.

3. Un proiettile di massa $m=10\text{g}$ si conficca in un blocco di massa $M=1\text{kg}$ alla velocità di $v_0=100\text{m/s}$ diretta lungo l'orizzontale. Il blocco è libero di scorrere senza attrito lungo un'asta metallica inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo $\alpha=40^\circ$. Determinare l'energia persa nell'urto, la massima quota raggiunta dal blocco, il tempo necessario per raggiungere tale quota.

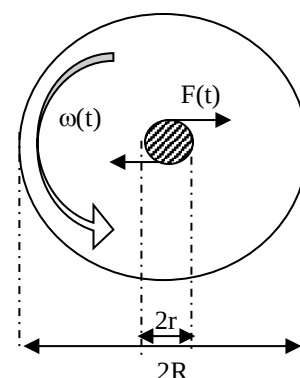


4. Due dischi omogenei di massa $M_1=10\text{ kg}$ ed $M_2=8\text{ kg}$, aventi raggi $R_1=20\text{ cm}$ e $R_2=15\text{ cm}$ sono liberi di ruotare orizzontalmente intorno ad un asse comune passante per i due centri. I due dischi inizialmente non sono in contatto. Il disco di raggio R_1 è in rotazione (senza attrito) attorno all'asse con velocità angolare costante pari a 2giri/s , mentre il secondo disco è fermo. Successivamente i due dischi vengono portati a contatto e, per effetto delle forze di attrito, dopo breve acquistano la stessa velocità di rotazione. Si calcoli il valore della velocità angolare comune finale e si determini l'energia dissipata dagli attriti. (Il momento di inerzia di un disco è $I=\frac{1}{2}mR^2$).

5. Un cilindro omogeneo di raggio $R=2\text{m}$ e di massa $M=10\text{kg}$ è vincolato a ruotare attorno all'asse verticale a come indicato in figura. Il disco inizialmente fermo viene colpito da un proiettile di massa $m=200\text{g}$ che incide nel punto A con una velocità $v_0=100\text{m/s}$ diretta lungo l'asse delle x incastrandosi nel cilindro. Calcolare la velocità angolare del cilindro dopo l'urto, e la velocità del punto A . Assumendo invece che durante la rotazione del disco nascano attriti che generano un momento esterno $M^{\text{ext}}=4\text{Nm}$ teso a far rallentare la rotazione del cilindro, determinare quando il cilindro si ferma. [il momento di inerzia del cilindro è $I_a=\frac{1}{2}MR^2$, $\theta=30^\circ$].



6. Una piattaforma circolare di massa $M=1000\text{kg}$ di diametro $2R=10\text{m}$, è libera di ruotare orizzontalmente intorno ad un albero di diametro $2r=1\text{m}$. Essa è inizialmente in rotazione alla velocità angolare $\omega_0=0.1\text{ rad/s}$ ed è soggetta ad una coppia di forze di attrito sull'albero centrale di modulo costante $F=100\text{N}$ che contrastano la rotazione creando un momento resistente. Determinare dopo quanto tempo la giostra si ferma. Ripetere l'esercizio ipotizzando che la forza di attrito sia proporzionale alla prima potenza della velocità angolare $F(t)=a*\omega(t)$ e stabilire dopo quanto tempo la velocità angolare si dimezza dal suo valore iniziale. (Il momento di inerzia di una ruota è $I=\frac{1}{2}MR^2$, $a=1000\text{ Ns/rad}$)



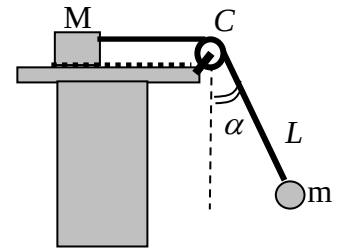


FISICA

A.A. 2024-2025

Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 10° prova

1. Un corpo di massa $M=5\text{kg}$ è fermo su un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito statico $\mu_s=0.4$. Ad esso è collegata, mediante una fune insensibile e di massa trascurabile una sferetta di massa $m=1.5\text{kg}$. La fune pende per un tratto L dal bordo del piano. La sferetta viene spostata di un angolo α , rispetto alla verticale, e viene lasciata oscillare. Si determini il massimo valore di α per il quale il corpo M si mantiene fermo.



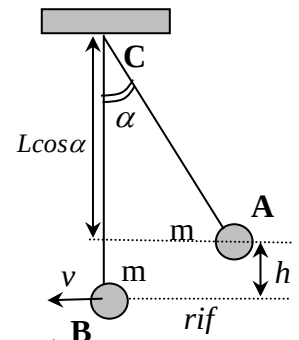
1. Soluzione. Calcolo della tensione massima della fune

La tensione del pendolo varia durante il moto oscillatorio. Essa è massima quando il pendolo transita per la posizione verticale B. Dalla conservazione dell'energia meccanica fra A (punto iniziale) e B si ricava la velocità in B

$$\text{Energia meccanica nel punto A : } E_{mA} = mgh = mgL(1 - \cos\alpha)$$

$$\text{Energia meccanica nel punto B : } E_{mB} = mv^2/2$$

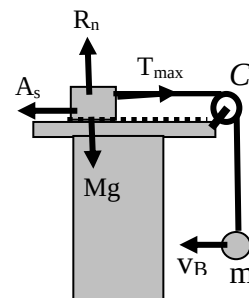
$$v_B = \sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)} \quad \text{da cui la tensione } T_{\max} = T_B = mg + mv_B^2/L = mg(3 - 2\cos\alpha)$$



Condizioni di equilibrio della massa M

Quando il pendolo raggiunge la posizione B, la tensione della fune diviene massima e l'attrito deve crescere il più possibile per controbilanciarla.

$$\begin{cases} R_n = Mg \\ A_s = T_{\max} \leq A_{\max} = \mu_s R_n = \mu_s Mg \end{cases}$$



$$\text{da cui sostituendo } T_{\max} \text{ dalla precedente si ha } \cos\alpha \geq \frac{3}{2} - \mu_s \frac{M}{2m} \quad \text{da cui } \alpha \leq 33^\circ 33'$$

2. Un blocco di massa $m=10\text{ kg}$ si muove alla velocità costante $v_0=3\text{ m/s}$ lungo un piano orizzontale liscio. In un certo istante il blocco urta elasticamente un cuneo di massa $M=20\text{ kg}$ inizialmente fermo sul piano. Dopo l'urto il cuneo prende a muoversi ed incontra un secondo blocco anch'essa di massa $m=10\text{ kg}$ che risale lungo il lato inclinato liscio del cuneo fino a raggiungere la quota massima h (rispetto al piano orizzontale). **Determinare** la massima altezza h raggiunta e le velocità del sistema in quella situazione.

2. Soluzione. L'urto centrale elastico fra il primo blocco m in moto, ed il cuneo M fermo, si risolve trovando le velocità dopo l'urto dei due corpi, imponendo la contemporanea conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto del sistema. Risolvendo la nuova velocità del blocco m

$$V_1 = \left(\frac{m-M}{m+M} \right) v_o + \left(\frac{2M}{m+M} \right) 0 = -\frac{v_o}{3} = -1 \text{ m/s}$$

(le velocità sono positive se nel senso dell'asse del moto)

La velocità cui viene lanciato il cuneo M

$$V_2 = \left(\frac{2m}{m+M} \right) v_o + \left(\frac{M-m}{m+M} \right) 0 = \frac{2}{3} v_o = +2 \text{ m/s}$$

Successivamente il cuneo incontra il secondo blocco che sale percorrendo senza attrito il pendio del cuneo, fino a raggiungere, per un istante, la massima quota h per poi ridiscendere. Durante la salita le uniche forze esterne agenti sul sistema massa-cuneo sono le forze peso e la reazione normale del piano. Essendo esse tutte dirette lungo la verticale, **si conserva la componente orizzontale della quantità di moto del sistema** tra i due momenti riportati in figura:

$$MV_2 = (m+M) \cdot V_C \quad \text{da cui} \quad V_C = \left(\frac{M}{m+M} \right) V_2 = +1.33 \text{ m/s}$$

In assenza di attriti si conserva anche l'energia meccanica fra i due momenti riportati in figura:

$$\frac{1}{2} MV_2^2 = \frac{1}{2} (m+M) \cdot V_C^2 + mgh \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{2} MV_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{m+M} \right) \cdot V_2^2 + mgh$$

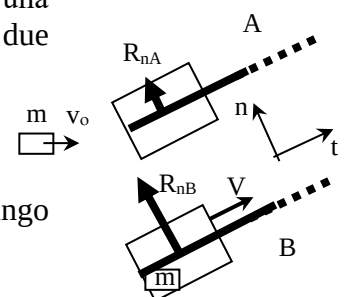
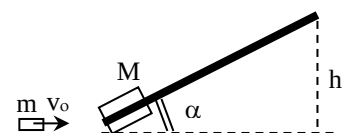
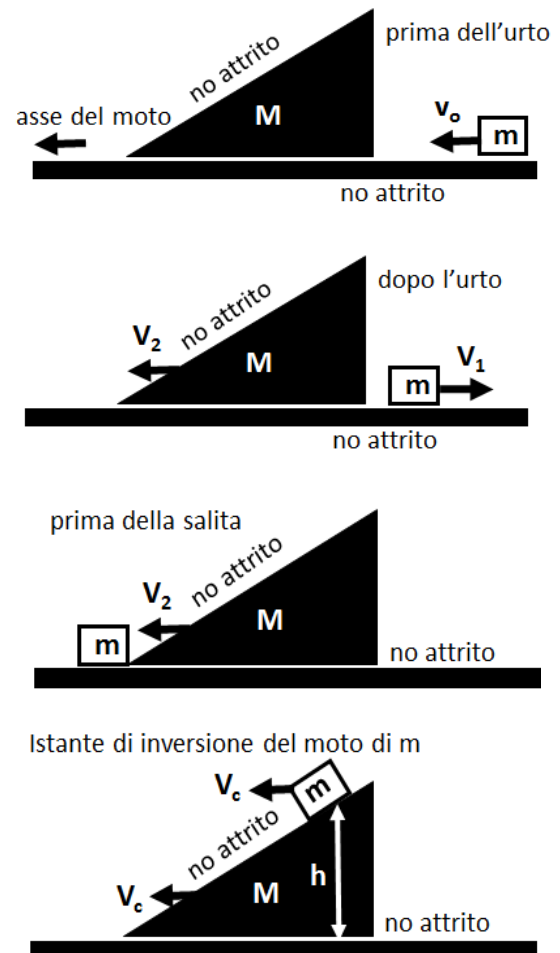
$$\text{da cui si ricava la massima quota } h \text{ raggiunta prima della discesa} \quad h = \left(\frac{M}{m+M} \right) \cdot \frac{V_2^2}{2g} = 13.6 \text{ cm}$$

3. Un proiettile di massa $m=10\text{g}$ si conficca in un blocco di massa $M=1\text{kg}$ alla velocità di $v_o=100\text{m/s}$ diretta lungo l'orizzontale. Il blocco è libero di scorrere senza attrito lungo un'asta metallica inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo $\alpha=40^\circ$. Determinare l'energia persa nell'urto, la massima quota raggiunta dal blocco, il tempo necessario per raggiungere tale quota.

3. Soluzione. A causa della presenza del vincolo durante l'urto si sviluppa una reazione normale impulsiva che essendo esterna al sistema costituito dalle due masse impedisce la conservazione della quantità di moto.

$$\int_t^{t+\varepsilon} \vec{F}^{ext} dt = \vec{p}_{CB} - \vec{p}_{CA} \neq 0$$

Però l'impulso di tale reazione agisce solo lungo l'asse $\mathbf{n}$, e non ha effetto lungo l'asse $\mathbf{t}$ dove invece si ha conservazione della quantità di moto



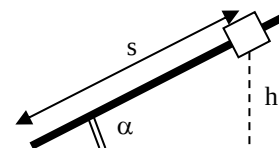
$$p_{tA} = p_{tB} \quad \text{ossia} \quad mv_o \cos \alpha = (m + M)V \quad \text{da cui} \quad V = \frac{mv_o \cos \alpha}{m + M}$$

le equazioni della cinematica durante la salita del sistema lungo l'asse t $\left\{ \begin{array}{l} s(t) = Vt - at^2/2 \\ v(t) = V - at \\ a = g \sin \alpha \end{array} \right.$

il **tempo** necessario per raggiungere il punto più alto $t = V/a = \frac{mv_o \cot g \alpha}{g(m + M)} = \mathbf{0.12 \text{ s}}$

la **quota massima** raggiunta durante il moto diviene quindi

$$h = s \cdot \sin \alpha = (V^2/2a) \sin \alpha = \left(\frac{m}{m + M} \right)^2 \frac{(v_o \cos \alpha)^2}{2g} = \mathbf{2.9 \text{ cm}}$$



l'energia persa nell'urto $E_{persa} = K_A - K_B = \frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{1}{2}(m + M)V^2 = \mathbf{49.7 \text{ J}}$

4. Due dischi omogenei di massa $M_1=10 \text{ kg}$ ed $M_2=8 \text{ kg}$, aventi raggi $R_1=20 \text{ cm}$ e $R_2=15 \text{ cm}$ sono liberi di ruotare orizzontalmente intorno ad un asse comune passante per i due centri. I due dischi inizialmente non sono in contatto. Il disco di raggio R_1 è in rotazione (senza attrito) attorno all'asse con velocità angolare costante pari a 2giri/s, mentre il secondo disco è fermo. Successivamente i due dischi vengono portati a contatto e, per effetto delle forze di attrito, dopo breve acquistano la stessa velocità di rotazione. Si calcoli il valore della velocità angolare comune finale e si determini l'energia dissipata dagli attriti. (Il momento di inerzia di ciascun disco rispetto al suo asse di rotazione è $I=mR^2/2$).

4. Soluzione.

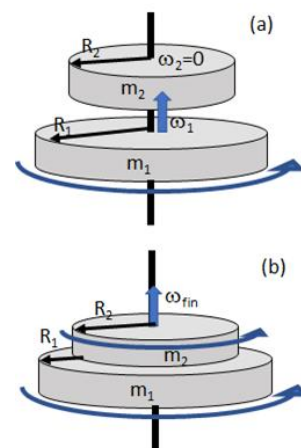
Nella prima fase (a) il primo disco ha momento della quantità di moto $b_1 = I_1 \omega_1$ e energia cinetica rotazionale $K_1 = \frac{1}{2}I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{4}M_1 R_1^2 \omega_1^2 = \mathbf{15.8 \text{ J}}$

Nella seconda fase (b) i due dischi vengono messi a contatto e grazie agli attriti dopo un breve transitorio cominciano a ruotare come un corpo unico alla medesima velocità angolare ω_{fin} . Gli attriti (che rappresentano forze interne al sistema) permettono infatti di annullare i movimenti relativi fra i due dischi. Non essendo presente alcun momento delle forze esterne viene conservato il momento della quantità di moto tra prima e dopo il contatto secondo l'espressione

$$b_1 = b_{tot} \quad \text{ossia} \quad I_1 \omega_1 = (I_1 + I_2) \omega_{fin} \quad \text{da cui la velocità angolare comune}$$

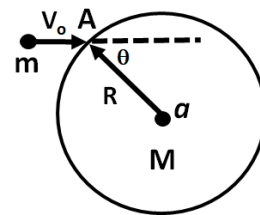
$$\omega_{fin} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \omega_1 = \frac{M_1 R_1^2}{M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2} \omega_1 = \mathbf{8.67 \text{ rad/s}}$$

cui corrisponde l'energia cinetica rotazionale $K_{fin} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \omega_{fin}^2 = \frac{1}{2} \frac{I_1^2}{I_1 + I_2} \omega_1^2 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} K_1 =$
 $\frac{M_1 R_1^2}{M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2} K_1 = \mathbf{10.9 \text{ J}}$ con una diminuzione di energia cinetica e sviluppo di calore $Q = \mathbf{4.9 \text{ J}}$



5. Un cilindro omogeneo di raggio $R=2\text{m}$ e di massa $M=10\text{kg}$ è vincolato a ruotare attorno all'asse verticale a come indicato in figura. Il disco inizialmente fermo viene colpito da un proiettile di massa $m=200\text{g}$ che incide nel punto A con una velocità $v_o=100\text{m/s}$ diretta lungo l'asse delle x incastrandosi nel cilindro. Calcolare la velocità angolare del cilindro dopo l'urto, e la velocità del punto A .

[Dati del problema: il momento di inerzia del cilindro è $I_a=MR^2/2$, $\theta=30^\circ$].
Assumendo invece che durante la rotazione del disco nascano attriti che danno luogo ad un momento esterno $M^{\text{ext}}=4\text{Nm}$ che tende a far rallentare la rotazione del cilindro, determinare dopo quanti secondi il cilindro si ferma.



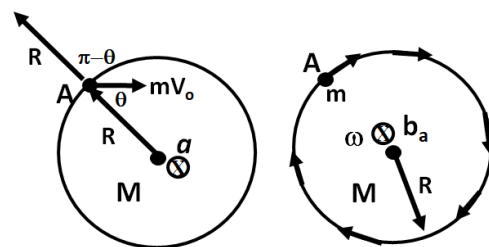
5. Soluzione. L'urto fra il proiettile ed il cilindro è perfettamente anelastico. Essendo il cilindro vincolato a ruotare intorno all'asse a , durante l'urto oltre alle forze interne nasce anche una forza impulsiva esterna agente dall'asse sul sistema cilindro/proiettile costringendolo ad una pura rotazione intorno all'asse a . La presenza di un impulso delle forze esterne impedisce la conservazione della quantità di moto. Tuttavia l'impulso ha origine sull'asse per cui durante l'urto **si conserva il momento della quantità di moto lungo l'asse a** .

Il momento della quantità di moto prima dell'urto

calcolato rispetto al centro del cilindro è $\vec{b}_o = \vec{R} \times m\vec{v}_o$

e rispetto all'asse a vale $b_a^{\text{prima}} = mv_o R \sin(\pi - \theta) = mv_o R \sin \theta$

dopo l'urto il proiettile si conficca nel punto A ed il momento della quantità di moto vale $b_a^{\text{dopo}} = I_{\text{tot}} \omega_o = \left(\frac{1}{2} MR^2 + mR^2 \right) \omega_o$



(la rotazione oraria è scelta in questo caso positiva), dove I_{tot} è il momento di inerzia complessivo del cilindro+proiettile.

Imponendo la conservazione di $b_a^{\text{prima}} = b_a^{\text{dopo}}$ si ottiene $\omega_o = \left(\frac{2m}{M + 2m} \right) \frac{v_o \sin \theta}{R} = \mathbf{0.962 \text{ rad/s}}$

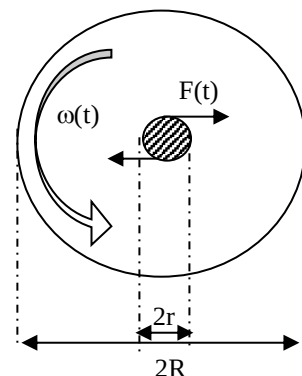
con **velocità di rotazione** del punto A pari ad $V_A = \omega_o R = \left(\frac{2m}{M + 2m} \right) v_o \sin \theta = \mathbf{1.92 \text{ m/s}}$

Facoltativo: il momento degli attriti tende a ridurre la velocità angolare

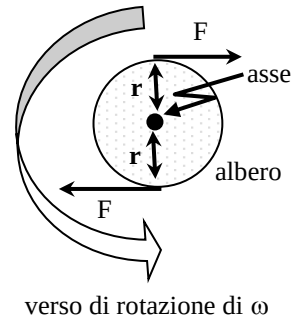
$-M_a^{\text{ext}} = I_{\text{tot}} \frac{d\omega}{dt}$ che integrata fornisce la velocità angolare $\omega(t) = \omega_o - \frac{M_a^{\text{ext}}}{I_{\text{tot}}} t$

La rotazione si arresta all'istante $t = \frac{I_{\text{tot}} \omega_o}{M_a^{\text{ext}}} = \frac{b_a^{\text{prima}}}{M_a^{\text{ext}}} = \frac{mv_o R \sin \theta}{M_a^{\text{ext}}} = \mathbf{5 \text{ s}}$

6. Una piattaforma circolare di massa $M=1000\text{kg}$ di diametro $2R=10\text{m}$, è libera di ruotare orizzontalmente intorno ad un albero di diametro $2r=1\text{m}$. Essa è inizialmente in rotazione alla velocità angolare $\omega_o=0.1 \text{ rad/s}$ ed è soggetta ad una coppia di forze di attrito sull'albero centrale di modulo costante $F=100\text{N}$ che contrastano la rotazione creando un momento resistente. Determinare dopo quanto tempo la giostra si ferma. Ripetere l'esercizio ipotizzando che la forza di attrito sia proporzionale alla prima potenza della velocità angolare $F(t)=a \cdot \omega(t)$ e stabilire dopo quanto tempo la velocità angolare si dimezza dal suo valore iniziale. (Il momento di inerzia di una ruota è $I=MR^2/2$, $a=1000 \text{ Ns/rad}$)



6. **Soluzione.** La piattaforma è vincolata a ruotare intorno all'asse dell'albero. Il verso positivo della rotazione è antiorario. Ciascuna forza di attrito, applicata all'esterno dell'albero, crea un momento resistente negativo perché tenderebbe a far ruotare la giostra in senso orario contrario ad ω . La somma dei momenti delle forze esterne proiettato lungo l'asse è quindi $M_{asse} = -Fr - Fr = -2Fr$



Dalla 2^a equazione cardinale

$$M_{asse} = -2Fr = \frac{db}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}$$

da cui

$$d\omega = -\frac{2Fr}{I} dt \quad \text{che integrata diviene} \quad \omega(t) = \omega_o - \left(\frac{2Fr}{I} \right) t$$

la giostra si ferma quando $t = \frac{I\omega_o}{2Fr} = \frac{MR^2\omega_o}{4Fr} = 12.5 \text{ s}$

Facoltativo: se invece $F(t) = a \cdot \omega(t)$ la 2^a eq. cardinale diviene $M_{asse} = -2a\omega r = I \frac{d\omega}{dt}$

da cui $\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{2ar}{I} = -\frac{4ar}{MR^2}$ che integrata diviene $\omega(t) = \omega_o \exp\left[-\frac{4ar}{MR^2} t\right]$

Imponendo $\omega(t) = \frac{\omega_o}{2}$ si ricava il tempo di dimezzamento $t = \frac{MR^2}{4ar} \ln 2 = 8.67 \text{ s}$