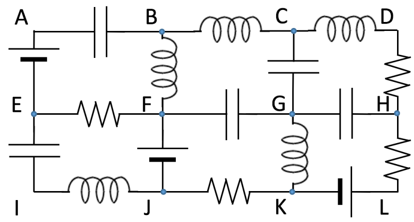
11° ESERCITAZIONE – lunedì 4 dicembre 2017 – non in aula

1) Nel circuito in figura $f = 5$ V, $C = 100$ nF, $L = 0{,}1$ mH e $R = 10\ \Omega$. Determinare l'energia elettrostatica, quella magnetica e la potenza complessivamente erogata dai generatori e quella complessivamente dissipata nelle resistenze.
[$U_{es} = 6{,}25\ \mu J$; $U_m = 0$; $P_{GEN} = 0$, $P_{RES} = 0$]



Nei generatori non scorre corrente! Infatti, considerando che a regime le capacità rappresentano interruzioni del circuito elettrico e le induttanze rappresentano collegamenti equipotenziali, si ha che:
- la corrente erogabile dal generatore nel ramo AE è "bloccata" dalla capacità del ramo AB
- le correnti nei rami GF, GC, GH sono interrotte dalle rispettive capacità e quindi nel ramo GK non scorre corrente.

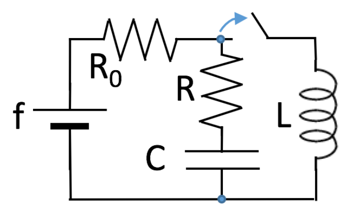
In condizioni stazionarie, quindi la corrente scorre in una sola maglia: preso come potenziale di riferimento nullo quello del punto J, la corrente erogata dal generatore JF percorrerebbe in sequenza i rami:
- FB (non FE perché, come già detto, il circuito da quel lato si interrompe nel ramo AB; non FG perché il ramo è interrotto dalla sua capacità)
- BC
- CD
- DH (dove è presente una resistenza)
- HL (dove è presente una resistenza)
- LK (dove è presente l'altro generatore orientato nel verso opposto alla corrente)
- KJ (dove è presente una resistenza).

Quindi $f-RI-RI-f-RI=0 \rightarrow I = 0$

Essendo nulle le correnti, sono nulle le potenze dei generatori ($P_G = f\ I$) e quelle dissipate nelle resistenze ($P_R = R\ I^2$). E' nulla anche l'energia magnetica accumulata nelle induttanze ($U_m = ½\ L\ I^2$).

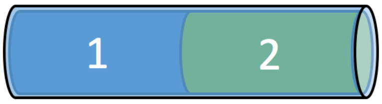
Analizziamo i potenziali nei diversi punti del circuito per determinare quali capacità sono cariche:
$V_J = V_I = V_K = V_G = 0$
$V_F = V_E = V_B = V_C = V_D = V_H = V_L = f$
$V_A = 2f$
Pertanto le differenze di potenziale delle capacità sono:
$C_{AB} = f$
$C_{CG} = f$
$C_{HG} = f$
$C_{FG} = f$
$C_{EI} = f$
corrispondenti a un'energia elettrostatica complessiva $U_{es} = 5\ ½\ C\ f^2$.

2) Il circuito in figura è a regime quando viene aperto l'interruttore. Dopo quanto tempo la differenza di potenziale ai capi di R è uguale a quella ai capi di C?
Dati: $f = 10$ V; $R = R_0 = 10\ k\Omega$; $C = 0{,}2\ \mu F$; $L = 10$ mH.
[$t^* = 4 \ln(3/2)$ ms]



2) Prima dell'apertura dell'interruttore non c'è differenza di potenziale ai capi dell'induttanza ($dI/dt=0$) pertanto la corrente erogata dal generatore attraversa R_0 e torna al generatore senza scorrere nel ramo con R e C: $I(0^-) = f/R_0$. Inoltre, dato che in R non scorre corrente la differenze di potenziale ai suoi estremi e quella della capacità sono entrambe nulle: $Q(0^-) = 0$.
Subito dopo l'apertura dell'interruttore la corrente nell'induttanza subisce una brusca variazione che induce una forza elettromotrice estremamente elevata ($f/R_0 \rightarrow 0$) che però non influenza il comportamento della maglia f, R_0, R, C.
Pertanto $f - R_0 I - R I – Q/C = 0$ dove la corrente I incrementa la carica della capacità: $dq = Idt = dQ \rightarrow I = dQ/dt$.
Derivando rispetto al tempo l'equazione della maglia si ha $(R_0+R)\, dI/dt + I/C = 0$ la cui soluzione è $I(t) = I_0\, e^{-t/\tau}$ con $\tau = (R+R_0)\, C$ e $I_0 = f/(R_0+R)$ dato che $Q(0^+) = Q(0^-) = 0$ (I_0 non ha nulla a che vedere con $I(0^-)$ dato che non c'è l'induttanza a mantenerla inizialmente invariata).
$RI(t^*) = Q(t^*)/C$ dove $Q(t^*)$ è l'integrale di $I(t)$ da 0 a t^*: $Q(t^*) = - \tau\, I_0\, (e^{-t^*/\tau} -1)$
e quindi $R\, I_0\, e^{-t^*/\tau} = - (R+R_0)\, I_0\, (e^{-t^*/\tau} -1) \rightarrow (2R+R_0)\, e^{-t^*/\tau} = (R+R_0) \rightarrow t^* = 2RC \ln 3/2$

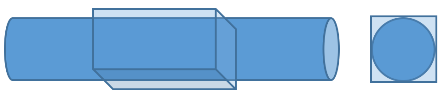
3) Il volume interno di un solenoide costituito da $n = 2000$ spire/m di sezione $S = 1\ cm^2$ e lunghezza $L = 20$ cm è riempito completamente da due cilindri di lunghezza L/2 costituiti da materiali omogenei di suscettività magnetiche $\chi_1 = + 10^{-5}$ e $\chi_2 = - 10^{-5}$. Nell'avvolgimento scorre una corrente elettrica di intensità costante per cui il campo magnetico è orientato da 1 verso 2. Determinare, trascurando gli effetti di bordo anche nella zona di contatto fra i due materiali:



a) il rapporto fra le correnti di magnetizzazione superficiale dei due materiali con il loro verso
b) la differenza tra l'energia accumulata in 1 e in 2 qualora nell'avvolgimento scorresse una corrente elettrica di intensità costante I = 100 mA.
[$J_{m,2} / J_{m,1} = -1$; $\Delta U = 1{,}6\ \pi$ pJ]

3) Trascurando gli effetti di bordo il campo $H = nI$ e i campi B_i sono confinati all'interno dei materiali, uniformi e paralleli all'asse del solenoide, come se fossero due circuiti indipendenti.
a) le densità di corrente di magnetizzazione superficiale sono date da $\mathbf{J}_{m,i} = \mathbf{M}_i \times \mathbf{n}$ dove $\mathbf{n}$ è la normale alla superficie mentre la magnetizzazione, essendo $\mathbf{M}_i = \chi_i\, \mathbf{H}$, è parallela all'asse del solenoide, concordemente nel materiale 1 ($\chi_1 > 0$) e discordemente nel materiale 2 ($\chi_2 < 0$).
Pertanto da $\mathbf{J}_{m,i1} = \chi_1\, \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}$ si ha $J_{m,1} = \chi_1\, n\, I$ orientata nel verso orario mentre da $\mathbf{J}_{m,2} = \chi_2\, \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}$ si ha $J_{m,2} = \chi_2\, n\, I$ orientata nel verso antiorario. Di conseguenza $J_{m,2} = - J_{m,1}$.
b) $U_i = ½\, B_i H\, \tau = ½\, \mu_i\, (nI)^2 SL/2$ e quindi $\Delta U = ½\, (\mu_2 - \mu_1)\, (nI)^2\, SL/2 = ½\, (\mu_0\, 2\chi_1)(nI)^2\, SL/2 = 1{,}6\ \pi\ 10^{-12}$ J.
In alternativa $\Delta U = ½\, (L_2-L_1)\, I^2$ con $L_i = \Phi(B_i)/I_i = \mu_i\, n\, (nL/2)\, S \rightarrow \Delta U = ½\, (\mu_0\, 2\chi_1)\, n\, (nL/2)\, S\, I^2$

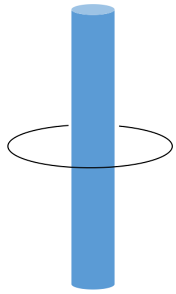
4) Su un cilindro di alluminio di diametro D e lungo L >> D vengono avvolte uniformemente n_1 spire per unità di lunghezza mentre su un sottile supporto di carta (assumere la stessa permeabilità magnetica del vuoto) lungo L/3 sagomato a formare uno scatolato di sezione quadrata di lato D e centrato rispetto al cilindro vengono avvolte n_2 spire quadrate per unità di lunghezza.



Calcolare il coefficiente di mutua induzione fra i due avvolgimenti.
[$\pi/12\ \mu\, n_1\, n_2\, D^2 L$]

4) $M_{1,2} = \Phi_{S2}(B_1)/I_1 = n_2 L/3\ \pi(D/2)^2 \mu\, n_1 = M_{2,1} = \Phi_{S1}(B_2)/I_2 = n_1 L/3\ \pi(D/2)^2 \mu\, n_2$

5) Un lungo solenoide costituito da n spire per unità di lunghezza, di raggio a, resistenza complessiva R e autoinduttanza L è circondato coassialmente da una spira circolare.
Ipotizzando che a partire dall'istante t = 0 nella spira circoli una corrente di intensità I = - K t determinare l'andamento temporale della corrente nel solenoide
{la forza elettromotrice indotta nel solenoide (secondario di un trasformatore) dipende da L e M}
[$M = \mu_0 n \pi a^2$; $-L\, dI_{sol}/dt + MK = RI_{sol}$; $I_{sol}(t) = \mu_0 n\pi a^2 K/R[1-\exp(-tR/L)]$:]



5) L è un dato del problema; va determinato M. E' preferibile calcolare il flusso attraverso la spira del campo generato dal solenoide: $M/I_{sol} = \mu_0 n\, I_{sol}\, \pi a^2 / I_{sol}$.
$f_{INDsol} - R\, I_{sol} = 0$ dove $f_{INDsoL} = - L\, dI_{sol}/dt - M\, dI_{spir}/dt \rightarrow - L\, dI_{sol}/dt - M\, dI_{spir}/dt - R\, I_{sol} = 0$
e quindi $L\, dI_{sol}/dt - M K + R\, I_{sol} = 0$ da cui $L\, dI_{sol}/dt = M K - R\, I_{sol}$.
$dI_{sol}/(M K - R\, I_{sol}) = -dt/L \rightarrow I_{sol} = MK/R\ [1 - \exp(-tR/L)]$