FISICA

A.A. 2022-2023

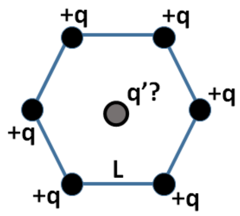
Ingegneria Gestionale

12 prova del 5 Maggio 2023

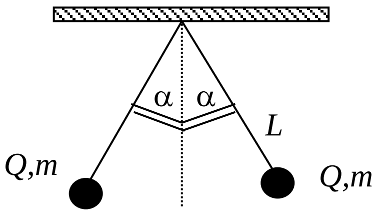
Gli elaborati dovranno essere spediti entro mercoledì 10 Maggio e saranno valutati ai fini dell'esame finale

1. Siano date due cariche positive q_1=10μC e q_2=90μC separate da una distanza L=1m. Calcolare la posizione del punto di equilibrio P, lungo la congiungente del segmento AB, dove la carica q_3=10μC non subisce alcuna forza elettrica.

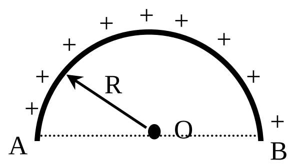
2. Date sei cariche puntiformi identiche con carica positiva q =10μC ai vertici di un esagono regolare di lato L=10cm, calcolare il valore della carica puntiforme q' che deve essere posta al centro dell'esagono per mantenere il sistema in quiete



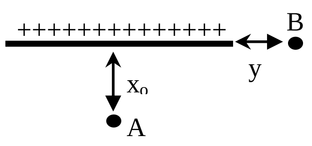
3. Due sfere aventi stessa massa *m=12g* e stessa carica *Q*, sono sospese allo stesso punto C mediante due fili inestensibili di lunghezza *L=35cm*. Quando le sfere sono a riposo i due pendoli risultano inclinati dello stesso angolo α=20° rispetto alla verticale (vedi figura). Determinare la carica su ciascuna sferetta



4. Si calcoli il vettore campo elettrico generato nel punto O da una carica *Q* distribuita uniformemente sulla semicirconferenza di raggio *R* indicata in figura.



5. Una carica Q è distribuita uniformemente su di un segmento rettilineo finito di lunghezza 2L=6cm. Sapendo che nel punto A disposto sulla mediana alla distanza x_o=4cm dal filo si registra un campo elettrico E_A=100V/m, determinare la posizione del punto B sulla prosecuzione del segmento alla distanza y da esso dove il modulo del campo elettrico assume lo stesso valore . Determinare inoltre la carica Q



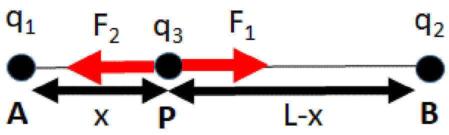
FISICA

A.A. 2022-2023

Ingegneria Gestionale

Soluzioni della 12ª prova

1. Le due forze agenti sulla carica q_3 nel punto di equilibrio P si controbilanciano: $F_1 = F_2 \Rightarrow \dfrac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_o x^2} = \dfrac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_o (L-x)^2}$



da cui invertendo l'espressione $(L-x)^2 - \dfrac{q_2}{q_1}x^2 = 0$

da cui $\left(1-\dfrac{q_2}{q_1}\right)x^2 - 2Lx + L^2 = 0$ con soluzioni $x_{1/2} = L\dfrac{1 \pm \sqrt{q_2/q_1}}{\left(1-\dfrac{q_2}{q_1}\right)}$. L'unica soluzione accettabile è quella con il segno negativo. Ciò permette di trovare la distanza AP=x

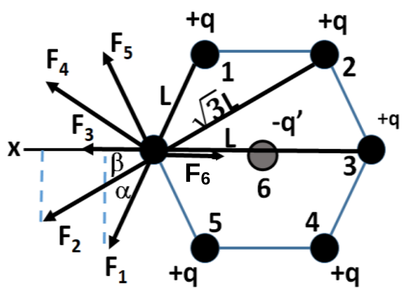
$$x = L\frac{1-\sqrt{q_2/q_1}}{\left(1-\dfrac{q_2}{q_1}\right)} = \frac{L}{1+\sqrt{q_2/q_1}} = \frac{L}{4} = 25\text{cm}$$

2. L'equilibrio del sistema viene prima valutato su una delle sei cariche esterne +q. Per ragioni di simmetria la risultante di tutte le forze agenti è diretta lungo l'asse x. Per questa ragione va imposto l'equilibrio di tutte le forze proiettate e sommate lungo x:

$$F_{1,x} = F_{5,x} = F_1 \cos\alpha = k_o \frac{q^2}{L^2}\cos(60°),$$

$$F_{2,x} = F_{4,x} = F_2 \cos\beta = k_o \frac{q^2}{3L^2}\cos(30°)$$

$$F_{3,x} = F_3 \cos(0) = k_o \frac{q^2}{4L^2}, \quad F_{6,x} = F_3 \cos(0) = -k_o \frac{qq'}{L^2}$$

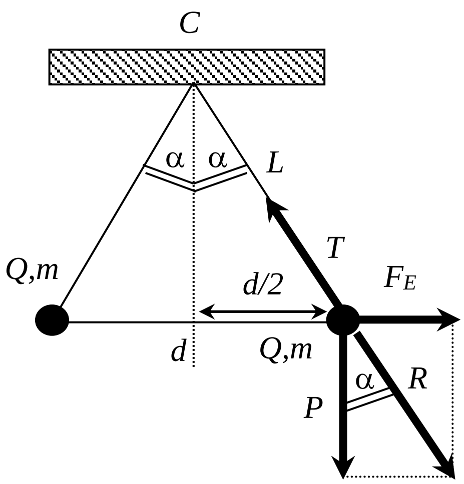


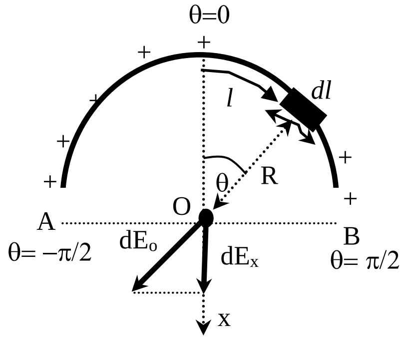
$$\sum_k F_{k,x} = \frac{k_o}{L^2}\left[q^2\left(2\cos(60°) + 2\frac{\cos(30°)}{3} + \frac{1}{4}\right) - qq'\right] = 0$$

da cui si ricava l'espressione della carica incognita centrale $q' = q\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{5}{4}\right) = 1.83$ q= 18.3 μC

L'equilibrio delle forze appena ottenuto vale in generale per qualsiasi carica esterna +q, e contemporaneamente anche per la carica interna -q' poiché si trova nel centro di simmetria del sistema di cariche.

3. Su ciascuna sferetta agiscono 3 forze: la forza peso $P=mg$, la forza elettrica repulsiva $F_E = \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o d^2} = \dfrac{Q^2}{16\pi\varepsilon_o L^2 sin^2\alpha}$ e la tensione del filo T. All'equilibrio la somma vettoriale delle tre forze deve annullarsi $\vec{P} + \vec{F}_E + \vec{T} = 0$ e quindi la risultante parziale di peso e forza elettrica deve essere opposta alla tensione del filo $\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_E = -\vec{T}$ ossia anch'essa inclinata di un angolo α rispetto alla verticale. Questo avviene solo se $F_E = Ptg\alpha$ da cui $Q = \sqrt{4(4\pi\varepsilon_o)L^2 mg \sin^3\alpha / \cos\alpha} = 0.52\mu\text{C}$

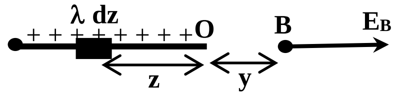




4. La carica Q è distribuita uniformemente sulla semicirconferenza con densità lineare $\lambda = Q/\widehat{AB} = Q/\pi R$. La carica infinitesima $dq=\lambda dl$ disposta sull'elemento di lunghezza infinitesima dl, genera nel punto O (alla distanza R) un contributo di potenziale $dV_o = dq/(4\pi\varepsilon_o R)$ ed un contributo di campo elettrico $dE_o = dq/\left(4\pi\varepsilon_o R^2\right)$ diretto come in figura. Per ottenere i valori totali di potenziale e campo elettrico occorre sommare tutti i contributi infinitesimi integrando lungo tutta la distribuzione di carica. In particolare $V_o = \int dV_o = \int dq/(4\pi\varepsilon_o R) = Q/(4\pi\varepsilon_o R)$ essendo R costante, mentre per il calcolo del campo elettrico è necessario fare la difficile somma vettoriale di tutti i contributi elementari $\vec{E}_o = \int d\vec{E}_o$. Per ragioni di simmetria della distribuzione di carica, il vettore risultante $\vec{E}_o$ è tutto diretto lungo l'asse delle x ($E_o = E_{o,x}$) per cui solo le proiezioni dei contributi lungo l'asse x vanno integrati $dE_{o,x} = dE_o \cos\theta$. Combinando tutte le espressioni si ottiene $E_o = E_{o,x} = \int dE_{o,x} = \int \dfrac{dq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R^2}$ dove purtroppo θ è variabile durante l'integrazione. Conviene quindi esprimere dq in funzione dell'angolo θ. Per la relazione fra archi ed angoli, l'ascissa curvilinea vale $l=R\theta$ che differenziata permette di scrivere $dl=R\,d\theta$, e quindi $dq=\lambda dl= \lambda R\ d\theta =(Q/\pi)\ d\theta$. che sostituito nell'espressione del campo permette di ottenere $E_o = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{Q}{\pi}\right)\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R^2} d\theta = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_o R^2}\left[sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_o R^2}$

5. Campo elettrico generato nel punto B

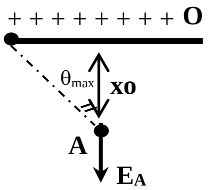
Il campo elettrico elementare è $dE = \dfrac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_o (z+y)^2}$



ed integrando

$$E_B = \int dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{2L}\frac{dz}{(z+y)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{z+y}\right]_0^{2L} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2L}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o y(y+2L)}$$

Campo elettrico generato nel punto A



Sfruttando le simmetrie si può dimostrare che
il campo elettrico nel punto A vale

$$E_A = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o x_o}\sin\theta_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o x_o}\frac{L}{\sqrt{x_o^2+L^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o x_o\sqrt{x_o^2+L^2}}$$

Imponendo $E_A = E_B \;\rightarrow\; y(y+2L) = x_o\sqrt{x_o^2+L^2}$ da cui $y = \sqrt{L^2 + x_o\sqrt{x_o^2+L^2}} - L =$ **2.39cm**

Mentre $Q = E_B\left(4\pi\varepsilon_o x_o\sqrt{x_o^2+L^2}\right) =$ **22.2 pC**