



FISICA

A.A. 2023-2024

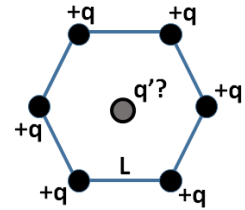
Ingegneria Gestionale

12 prova del 13 Maggio 2024

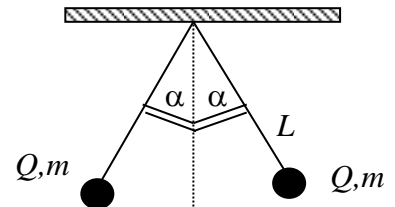
Gli elaborati dovranno essere spediti entro venerdì 17 Maggio e saranno valutati ai fini dell'esame finale

1. Siano date due cariche positive $q_1=10\mu\text{C}$ e $q_2=90\mu\text{C}$ separate da una distanza $L=1\text{m}$. Calcolare la posizione del punto di equilibrio P, lungo la congiungente del segmento AB, dove la carica $q_3=10\mu\text{C}$ non subisce alcuna forza elettrica.

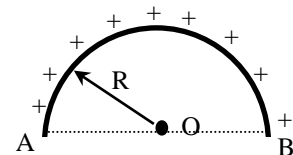
2. Date sei cariche puntiformi identiche con carica positiva $q = 10\mu\text{C}$ ai vertici di un esagono regolare di lato $L=10\text{cm}$, calcolare il valore della carica puntiforme q' che deve essere posta al centro dell'esagono per mantenere il sistema in quiete



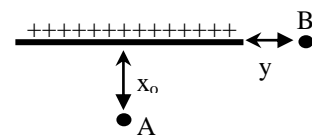
3. Due sfere aventi stessa massa $m=12\text{g}$ e stessa carica Q , sono sospese allo stesso punto C mediante due fili inestensibili di lunghezza $L=35\text{cm}$. Quando le sfere sono a riposo i due pendoli risultano inclinati dello stesso angolo $\alpha=20^\circ$ rispetto alla verticale (vedi figura). Determinare la carica su ciascuna sferetta



4. Si calcoli il vettore campo elettrico generato nel punto O da una carica Q distribuita uniformemente sulla semicirconferenza di raggio R indicata in figura.



5. Una carica Q è distribuita uniformemente su di un segmento rettilineo finito di lunghezza $2L=6\text{cm}$. Sapendo che nel punto A disposto sulla mediana alla distanza $x_0=4\text{cm}$ dal filo si registra un campo elettrico $E_A=100\text{V/m}$, determinare la posizione del punto B sulla prosecuzione del segmento alla distanza y da esso dove il modulo del campo elettrico assume lo stesso valore. Determinare inoltre la carica Q





FISICA

A.A. 2023-2024

Ingegneria Gestionale

Soluzioni della 12^a prova

1. Le due forze agenti sulla carica q_3 nel punto di equilibrio P

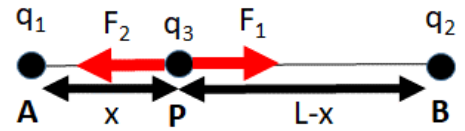
si controbilanciano: $F_1 = F_2 \Rightarrow \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 (L-x)^2}$

da cui invertendo l'espressione $(L-x)^2 - \frac{q_2}{q_1} x^2 = 0$

da cui $\left(1 - \frac{q_2}{q_1}\right)x^2 - 2Lx + L^2 = 0$ con soluzioni $x_{1/2} = L \frac{1 \pm \sqrt{q_2/q_1}}{\left(1 - \frac{q_2}{q_1}\right)}$. L'unica soluzione accettabile

è quella con il segno negativo. Ciò permette di trovare la distanza AP=x

$$x = L \frac{1 - \sqrt{q_2/q_1}}{\left(1 - \frac{q_2}{q_1}\right)} = \frac{L}{1 + \sqrt{q_2/q_1}} = \frac{L}{4} = 25\text{cm}$$

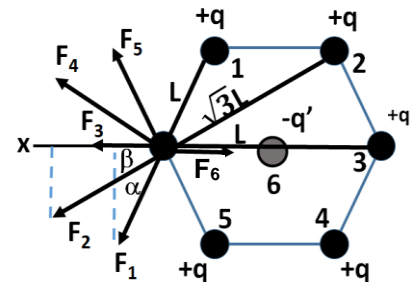


2. L'equilibrio del sistema viene prima valutato su una delle sei cariche esterne +q. Per ragioni di simmetria la risultante di tutte le forze agenti è diretta lungo l'asse x. Per questa ragione va imposto l'equilibrio di tutte le forze proiettate e sommate lungo x:

$$F_{1,x} = F_{5,x} = F_1 \cos \alpha = k_o \frac{q^2}{L^2} \cos(60^\circ),$$

$$F_{2,x} = F_{4,x} = F_2 \cos \beta = k_o \frac{q^2}{3L^2} \cos(30^\circ)$$

$$F_{3,x} = F_3 \cos(0) = k_o \frac{q^2}{4L^2}, \quad F_{6,x} = F_3 \cos(0) = -k_o \frac{qq'}{L^2}$$

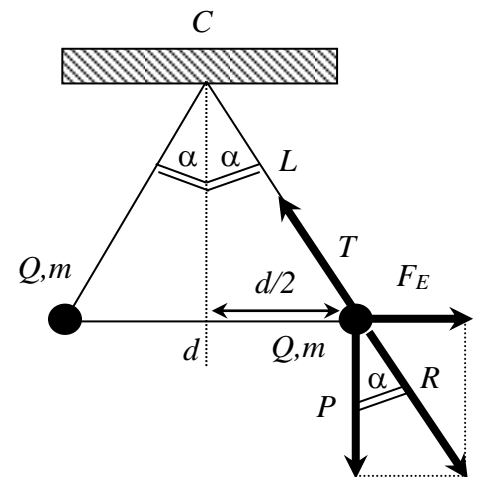


$$\sum_k F_{k,x} = \frac{k_o}{L^2} \left[q^2 \left(2 \cos(60^\circ) + 2 \frac{\cos(30^\circ)}{3} + \frac{1}{4} \right) - qq' \right] = 0$$

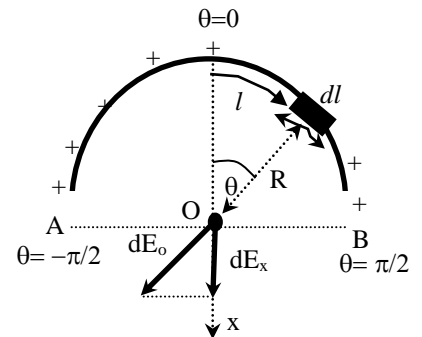
da cui si ricava l'espressione della carica incognita centrale $q' = q \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4} \right) = 1.83 q = 18.3 \mu\text{C}$

L'equilibrio delle forze appena ottenuto vale in generale per qualsiasi carica esterna +q, e contemporaneamente anche per la carica interna -q' poiché si trova nel centro di simmetria del sistema di cariche.

3. Su ciascuna sferetta agiscono 3 forze: la forza peso $P=mg$, la forza elettrica repulsiva $F_E = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 L^2 \sin^2\alpha}$ e la tensione del filo T . All'equilibrio la somma vettoriale delle tre forze deve annullarsi $\vec{P} + \vec{F}_E + \vec{T} = 0$ e quindi la risultante parziale di peso e forza elettrica deve essere opposta alla tensione del filo $\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_E = -\vec{T}$ ossia anch'essa inclinata di un angolo α rispetto alla verticale. Questo avviene solo se $F_E = Ptg\alpha$ da cui $Q = \sqrt{4(4\pi\epsilon_0)L^2 mg \sin^3\alpha / \cos\alpha} = 0.52\mu\text{C}$



4. La carica Q è distribuita uniformemente sulla semicirconferenza con densità lineare $\lambda = Q/\widehat{AB} = Q/\pi R$. La carica infinitesima $dq = \lambda dl$ disposta sull'elemento di lunghezza infinitesima dl , genera nel punto O (alla distanza R) un contributo di potenziale $dV_o = dq/(4\pi\epsilon_0 R)$ ed un contributo di campo elettrico $dE_o = dq/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ diretto come in figura. Per ottenere i valori totali di potenziale e campo elettrico occorre sommare tutti i contributi infinitesimi integrando lungo tutta



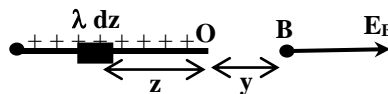
la distribuzione di carica. In particolare $V_o = \int dV_o = \int dq/(4\pi\epsilon_0 R) = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$ essendo R costante, mentre per il calcolo del campo elettrico è necessario fare la difficile somma vettoriale di tutti i contributi elementari $\vec{E}_o = \int d\vec{E}_o$. Per ragioni di simmetria della distribuzione di carica, il vettore risultante \vec{E}_o è tutto diretto lungo l'asse delle x ($E_o = E_{o,x}$) per cui solo le proiezioni dei contributi lungo l'asse x vanno integrati $dE_{o,x} = dE_o \cos\theta$. Combinando tutte le espressioni si ottiene $E_o = E_{o,x} = \int dE_{o,x} = \int \frac{dq \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ dove purtroppo θ è variabile durante

l'integrazione. Conviene quindi esprimere dq in funzione dell'angolo θ . Per la relazione fra archi ed angoli, l'ascissa curvilinea vale $l=R\theta$ che differenziata permette di scrivere $dl=R d\theta$, e quindi $dq=\lambda dl = \lambda R d\theta = (Q/\pi) d\theta$. che sostituito nell'espressione del campo permette di

$$\text{ottenere } E_o = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{Q}{\pi}\right) \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} d\theta = \frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

5. Campo elettrico generato nel punto B

Il campo elettrico elementare è $dE = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0(z+y)^2}$

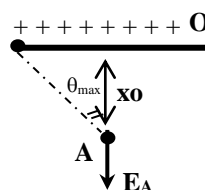


ed integrando

$$E_B = \int dE = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2L} \frac{dz}{(z+y)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{z+y} \right]_0^{2L} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2L} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y(y+2L)}$$

Campo elettrico generato nel punto A

Sfruttando le simmetrie si può dimostrare che il campo elettrico nel punto A vale



$$E_A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x_0} \sin \theta_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x_0} \frac{L}{\sqrt{x_0^2 + L^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x_0 \sqrt{x_0^2 + L^2}}$$

Imponendo $E_A = E_B \rightarrow y(y+2L) = x_0 \sqrt{x_0^2 + L^2}$ da cui $y = \sqrt{L^2 + x_0 \sqrt{x_0^2 + L^2}} - L = \mathbf{2.39cm}$

Mentre $Q = E_B (4\pi\epsilon_0 x_0 \sqrt{x_0^2 + L^2}) = \mathbf{22.2 pC}$