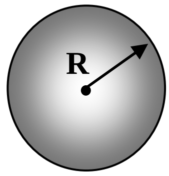
FISICA

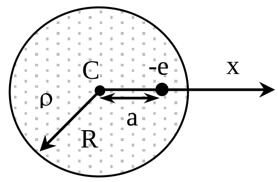
A.A. 2024-2025
Ingegneria Gestionale
14 prova del 16 Maggio 2025

Gli elaborati dovranno essere spediti entro martedì 20 Maggio e saranno valutati ai fini dell'esame finale

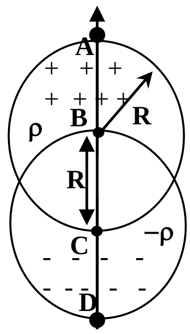
1. Calcolare il campo elettrico $E_o(r)$ di una sfera di raggio R, in cui è disposta una carica con densità non uniforme dipendente dal raggio $\rho(r)=k*r^3$. Ripetere l'esercizio per un cilindro infinito di sezione circolare di raggio R con stessa $\rho(r)$



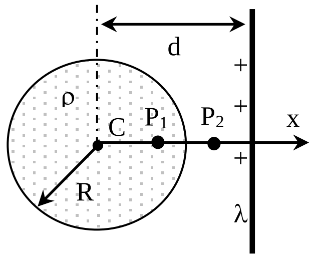
2. Un cilindro di lunghezza infinita e di raggio R è carico con densità volumetrica uniforme $\rho=1\mu C/m^3$. All'interno del cilindro si trova un elettrone, inizialmente fermo a distanza a=1cm dall'asse del cilindro. Descrivere il tipo di moto cui è soggetto l'elettrone, calcolare la velocità con cui esso passa per il punto C dell'asse del cilindro ed il tempo necessario per raggiungere il punto C [la massa dell'elettrone $m_e=9.1\cdot10^{-31}$ kg; la carica dell'elettrone: $-e = -1.6\cdot10^{-19}$ C]



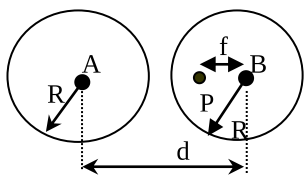
3. Due sfere uniformemente cariche di egual raggio R=30cm sono compenetrate l'una nell'altra in modo che la distanza fra i due centri B e C sia uguale al raggio R. La distribuzione uniforme di carica vale $+\rho=100\mu C/m^3$ per la sfera di centro B ed è di segno opposto con valore $-\rho$ per la sfera di centro C in modo che nella regione di intersezione vi sia assenza di carica. Determinare il campo elettrico nei punti A,B,C,D.



4. Una sfera di raggio R=3cm è carica con densità volumetrica uniforme ρ. Una seconda carica è distribuita uniformemente su di un filo infinitamente lungo con densità lineare $\lambda = \pi\rho R^2/6$, posto ad una distanza d=5cm dal centro della sfera C. Determinare la posizione degli unici due punti di equilibrio dove il campo elettrico totale si annulla. Suggerimento: entrambi i punti sono disposti sull'asse x. Il punto P_1 è all'interno della sfera, il punto P_2 all'esterno.

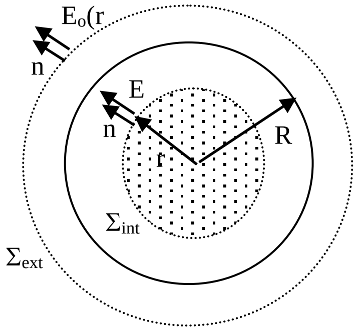


5. Due cilindri paralleli, infinitamente lunghi, di raggio R=20cm sono alla distanza d=60cm. Sapendo che sul primo è posta una carica positiva distribuita uniformemente con densità volumetrica $\rho_1=3\cdot10^{-6}C/m^3$ e sapendo che non si registra alcun campo elettrico nel punto P posto a distanza f=6cm dall'asse del secondo cilindro, determinare la densità di carica ρ_2, supposta uniforme, che deve essere disposta nel secondo cilindro.



FISICA

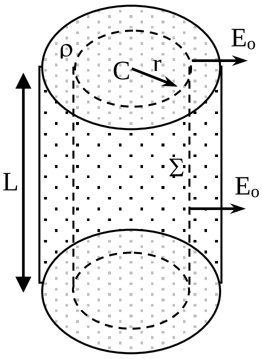
A.A. 2024-2025
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 14ª prova



1. Per la simmetria del problema il campo elettrico $E_o(r)$ è radiale e può essere calcolato applicando la legge di Gauss. Per i punti interni che si trovano sulla superficie Σ_{int} di raggio $r<R$, il flusso uscente da Σ_{int} vale $\Phi_{\Sigma\, int} = \int_{\Sigma\, int} \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$ che per Gauss deve valere Q_{int}/ε_o, dove il valore della carica interna alla superficie Σ_{int} vale

$$Q_{int} = \int \rho dV = \int_0^r \rho\left(4\pi r^2 dr\right) = 4\pi k \int_0^r r^5 dr = \frac{4\pi}{6} k r^6$$

Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo interno $E_{int} = kr^4 / 6\varepsilon_0$. Per i punti esterni che si trovano sulla superficie Σ_{ext} di raggio $r>R$, il flusso uscente da Σ_{ext} vale $\Phi_{\Sigma ext} = \int_{\Sigma ext} \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$ che per Gauss deve valere ancora Q_{int}/ε_o. Ma questa volta la carica contenuta è tutta la carica $Q = \int \rho dV = \int_0^R \rho\left(4\pi r^2 dr\right) = 4\pi k \int_0^R r^5 dr = \frac{4\pi}{6} kR^6$. Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo esterno $E_{ext} = kR^6 / 6\varepsilon_0 r^2$.



2. Il campo elettrico interno al cilindro può essere calcolato applicando la legge di Gauss alla superficie cilindrica Σ concentrica, di lunghezza L e di raggio r<R

$$\Phi_\Sigma\left(\vec{E}_o\right) = \int \vec{E}_o \cdot \hat{n}_{ext} dS = 2\pi r L = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho \pi r^2 L}{\varepsilon_o}$$

da cui si ricava il campo elettrico interno $E_{o\,int} = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} r$

L'elettrone quindi è soggetto ad una forza attrattiva diretta lungo l'asse delle x verso il centro C che può essere assimilata alla forza elastica di richiamo di una molla

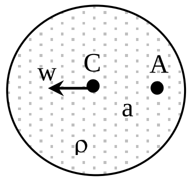
$$m_e a_x = -eE_{ox}, \quad \text{ossia} \quad m_e \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{e\rho}{2\varepsilon_o}\right)x, \quad \text{e quindi} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{e\rho}{2m_e\varepsilon_o}\right)x = 0$$

che dà vita ad un moto armonico lungo x, del tipo $x = a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ dove $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m_e\varepsilon_o}{e\rho}}$ = **63 ns**

da cui si ricava il tempo per raggiungere C (un quarto del periodo): **t_C=T/4=15.75 ns**

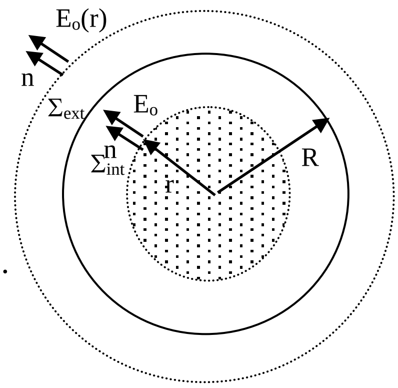
L'esercizio poteva anche essere risolto più semplicemente con considerazioni di tipo energetico fra i punti A,C ; $U_A + T_A = U_C + T_C$ ossia $-eV_A = -eV_C + m_e w^2/2$

da cui $w = \sqrt{2e(V_c - V_A)/m_e}$ dove $V_C - V_A = \int_0^a E_{o\,int} dr = \frac{\rho a^2}{4\varepsilon_o}$



ed in definitiva $w = \sqrt{e\rho a^2 / 2m_e\varepsilon_o}$ = **9.97·10⁵ m/s**

3. Campo elettrico e potenziale di una sfera uniformemente carica



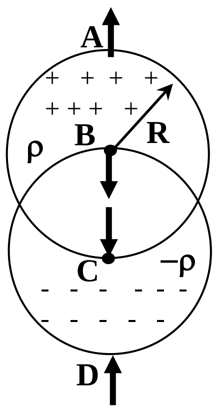
Il flusso uscente da una superficie sferica di raggio r
vale sempre $\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$

Campo esterno: applicando Gauss alla superficie Σ_{ext} la carica interna coincide con quella totale della sfera $Q_{tot} = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$ da cui $E_{ext} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o} \frac{R^3}{r^2}$.

Potenziale esterno: $V_{ext} = \int_r^\infty E_{ext} dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_o} \frac{R^3}{r}$

Campo interno: applicando Gauss alla superficie Σ_{int} la carica interna è $Q_{int} = \int \rho dV = \int_0^r \rho(4\pi r^2 dr) = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$ da cui si ottiene $E_{int} = \rho r / 3\varepsilon_0$

Potenziale interno: $V_{int} = \int_r^R E_{int} dr + V_{ext}(R) = \frac{\rho}{6\varepsilon_o}(3R^2 - r^2)$



Campo elettrico della distribuzione

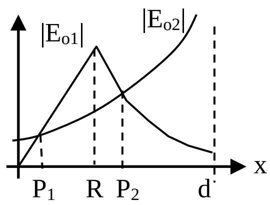
$$E_D = E_A = E^{(1)}_{A,int}(R) + E^{(2)}_{A,ext}(2R) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_o} + \frac{-\rho R^3}{3\varepsilon_o (2R)^2} = \frac{\rho R}{4\varepsilon_o} = \mathbf{8.48\ 10^5\ V/m}$$

$$E_B = E_C = E^{(1)}_{C,ext}(R) + E^{(2)}_{C,int}(0) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_o} = \mathbf{1.13\ 10^6\ V/m}$$

4. La regione di spazio dove è possibile trovare i punti di equilibrio si riduce per ragioni di simmetria al solo semiasse positivo delle *x*. Lungo tale semiasse la componente E_{ox} del campo elettrico generato dalla distribuzione sferica vale

$$\begin{cases} E^{(1)}_{ox,int} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o} x & 0 < x < R \\ E^{(1)}_{ox,ext} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o} \dfrac{R^3}{x^2} & x \geq R \end{cases}$$

, mentre la componente E_{ox} prodotta dal filo vale



$$\begin{cases} E^{(2)}_{ox} = \dfrac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_o |d-x|} & 0 < x < d \\ E^{(2)}_{ox} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o |d-x|} & x \geq d \end{cases}$$

. E' evidente che la somma algebrica dei campi può annullarsi solo per punti appartenenti al segmento 0<x<d dove i campi sono discordi ma i valori assoluti possono equivalersi (vedi grafico)

Ricerca del punto di equilibrio P_1: per 0<x<R, $E^{(1)}_{ox,\text{int}} + E^{(2)}_{ox} = 0$ da cui

$$\frac{\rho}{3\varepsilon_o}x - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o(d-x)} = 0 \quad \text{ossia} \quad x(d-x) - \frac{3\lambda}{2\pi\rho} = 0$$

che porta alla equazione di 2° grado

$$x^2 - dx + R^2/4 = 0$$

con unica soluzione accettabile $x = \dfrac{d - \sqrt{d^2 - R^2}}{2} =$ **0.5 cm**

Ricerca del punto di equilibrio P_2: per R<x<d, $E^{(1)}_{ox,ext} + E^{(2)}_{ox} = 0$ da cui

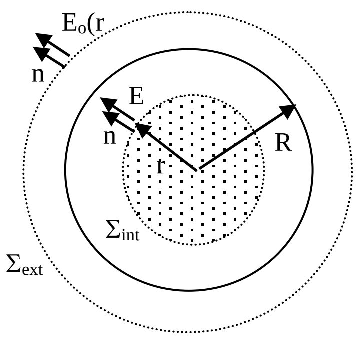
$$\frac{\rho}{3\varepsilon_o}\frac{R^3}{x^2} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o(d-x)} = 0 \quad \text{ossia} \quad (d-x)R^3 - x^2\frac{3\lambda}{2\pi\rho} = 0$$

che porta alla equazione di 2° grado

$$x^2 + 4Rx - 4Rd = 0$$

con unica soluzione accettabile $x = -2R + \sqrt{4R(R+d)} \cong$ **3.8 cm**

5. Come primo passo conviene determinare, applicando la legge di Gauss, il campo elettrico generato da un cilindro infinitamente lungo uniformemente carico con densità ρ_1. Il flusso uscente dalla superficie cilindrica generica Σ di raggio *r* e di altezza *L* vale $\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n}dS = 2\pi rLE_o(r) = Q_{\text{int}}/\varepsilon_o$ dove



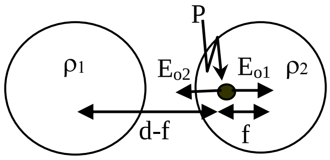
$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \rho_1\pi r^2 L & r < R \\ \rho_1 \pi R^2 L & r \ge R \end{cases}$$

da cui il campo elettrico

$$\begin{cases} E_{o\,\text{int}} = \rho_1 r/2\varepsilon_o & r < R \\ E_{oext} = \rho_1 R^2/2\varepsilon_o r & r \ge R \end{cases}$$

Le stesse formule possono essere applicate per la seconda distribuzione ρ_2.

La condizione di annullamento del campo elettrico nel punto P implica



$E_{o1}(d-f) = E_{o2}(f)$ ossia $\dfrac{\rho_1 R^2}{2\varepsilon_o(d-f)} = \dfrac{\rho_2 f}{2\varepsilon_o}$ da cui $\rho_2 = \rho_1\dfrac{R^2}{f(d-f)} =$ **3.7 μC/m³**