



FISICA

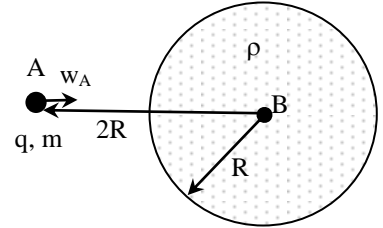
A.A. 2022-2023

Ingegneria Gestionale

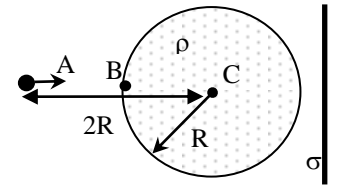
14° prova del 19 Maggio 2023

Gli elaborati dovranno essere scansionati e inviati entro Lunedì 22 Maggio.

1. Data una sfera di raggio $R=1\text{m}$ uniformemente carica con densità volumetrica $\rho=50\mu\text{C}/\text{m}^3$, determinate la velocità minima w_A con cui deve essere lanciata una particella di massa $m=15\text{g}$ e di carica $q=1\mu\text{C}$ distante $2R$ dal centro della sfera (punto A) affinché possa raggiungere il centro della sfera (punto B).



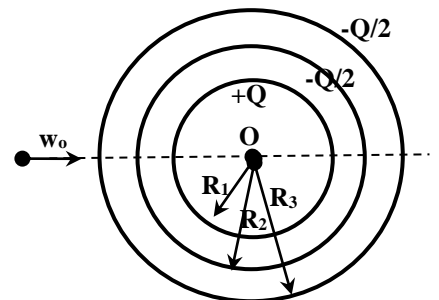
2. Una carica puntiforme positiva deve essere lanciata contro una sfera di raggio $R=8\text{cm}$, carica con densità volumetrica uniforme $\rho=200\mu\text{C}/\text{m}^3$. Il lancio viene inizialmente pensato in modo che la carica parta dal punto A (distante $2R$ dal centro), penetri la sfera fino a raggiungere il centro C con velocità nulla. In un secondo momento si decide di porre uno schermo piano uniformemente carico con densità σ per evitare che la carica puntiforme penetri nella sfera. A parità di condizioni iniziali, quale dovrà essere il valore di σ minimo affinché essa possa al più toccare la superficie della sfera (punto B) ma non penetrarla?



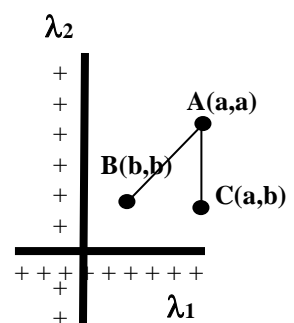
3. Una sfera cava di raggio esterno $R_2=1\text{m}$ e raggio interno $R_1=0.6\text{m}$ è uniformemente carica con densità volumetrica $\rho=12\mu\text{C}/\text{m}^3$ nella regione interna individuata dalla condizione $R_1 \leq r \leq R_2$. Determinare il lavoro necessario per trasportare una carica $q=2\mu\text{C}$ dall'infinito nel centro della sfera cava.

4. Date tre cariche ai vertici di un triangolo equilatero di lato l , calcolare il campo elettrico ed il potenziale al centro del triangolo. Dare il valore numerico per $l=3\text{cm}$, $q_1 = q_2 = -q_3 = 5\mu\text{C}$.

5. Tre gusci conduttori sferici di raggio rispettivamente R_1, R_2, R_3 , e di carica corrispondente $+Q, -Q/2, -Q/2$ sono disposti in modo da avere centro comune O. Una carica puntiforme $+q$ di massa m viene lanciata lungo una traiettoria radiale dall'esterno contro i gusci. Determinare le velocità con cui la carica attraversa ciascun guscio, supponendo di poterlo penetrare senza attriti. [Dati: $R_1=1\text{cm}$, $R_2=4\text{cm}$, $R_3=5\text{cm}$, $Q=1\mu\text{C}$, $q=10\text{nC}$, $m=1\text{g}$, $w_0=4\text{m/s}$]



6. Due fili indefiniti uniformemente carichi con densità uniforme λ_1, λ_2 sono disposti sugli assi x ed y rispettivamente in direzioni quindi ortogonali intersecantisi nell'origine O. Una carica positiva q ferma nel punto A(a,a) viene portata nel punto B(b,b) in quiete per effetto di azioni esterne. Determinare il lavoro L_{AB} svolto dalle azioni esterne, contrarie a quelle elettrostatiche, per spostare la carica dal punto A al punto B. Ripetere l'esercizio per analogo spostamento da A al punto C(a,b). [Dati: $q=1\mu\text{C}$, $\lambda_1=100\mu\text{C}/\text{m}$, $\lambda_2=300\mu\text{C}/\text{m}$, $a=2\text{cm}$, $b=1\text{cm}$].





FISICA

A.A. 2022-2023

Ingegneria Gestionale

Soluzioni 14° prova

1. Applicando la legge di Gauss, il flusso del campo elettrico uscente da una superficie sferica centrata in B e di raggio generico r assume l'espressione $\Phi(\vec{E}_o) = \int_{\Sigma} \vec{E}_o \cdot \hat{n}_{ext} dS = 4\pi r^2 E_o = Q_{int} / \epsilon_o$

dove $Q_{int} = \begin{cases} r < R & = \rho(4\pi r^3/3) \\ r > R & = \rho(4\pi R^3/3) \end{cases}$ da cui si ottiene il campo elettrico $\begin{cases} r < R & E_o = \rho r / 3\epsilon_o \\ r > R & E_o = \rho R^3 / 3\epsilon_o r^2 \end{cases}$

e, dopo integrazione, il potenziale $\begin{cases} r < R & V_o(r) = \int_r^R E_o dr + V_o(R) = \frac{\rho}{6\epsilon_o} (3R^2 - r^2) \\ r > R & V_o(r) = \int_r^{\infty} E_o dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_o r} \end{cases}$ ove si è assunto

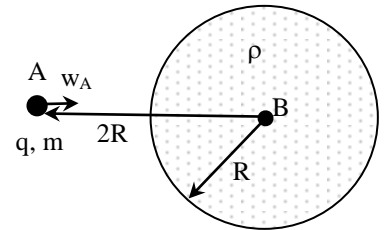
nullo il potenziale all'infinito. La differenza di potenziale fra i punti B ed A assume quindi il valore

$$\Delta V_{BA} = V_o(0) - V_o(2R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_o} > 0 \text{ valore che conferma la necessità di lanciare } q \text{ alla velocità } w_A$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica nei punti A,B quindi

$$qV_A + T_A = qV_B + T_B. \text{ In questo caso la velocità iniziale minima } w_A$$

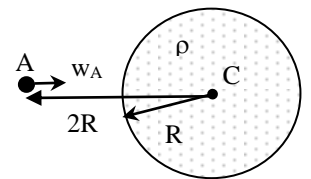
corrisponde al caso ideale di una velocità finale nulla $w_B=0$, e quindi $T_B=0$.



Da questa condizione $w_A = \sqrt{2q\Delta V_{BA}/m} = \sqrt{2q\rho R^2/3m\epsilon_o} = 15.9 \text{ m/s}$.

2. La prima parte del problema si imposta, come nel problema precedente, imponendo la conservazione dell'energia durante il tragitto da A verso C

$$T_A + qV_A^{sfera} = qV_C^{sfera}$$



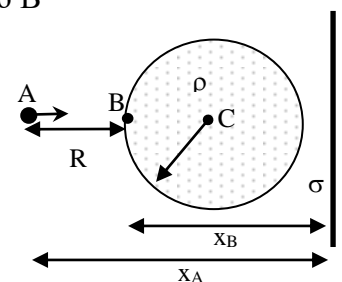
dove T_A è l'energia cinetica della particella nel punto A, mentre V^{sfera} è il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione sferica. Nella seconda parte del problema compare una seconda distribuzione di carica (strato piano) che genera un potenziale elettrostatico V^{piano} da aggiungere al precedente. Imponendo la conservazione dell'energia durante il tragitto da A verso B

$$T_A + qV_A^{sfera} + qV_A^{piano} = qV_B^{sfera} + qV_B^{piano}$$

Combinando le espressioni ed eliminando i termini comuni T_A, V_A^{sfera} si ottiene

$$V_B^{piano} - V_A^{piano} = V_C^{sfera} - V_B^{sfera} \text{ ossia } \int_{x_B}^{x_A} \frac{\sigma}{2\epsilon_o} dx = \int_0^R \frac{\rho}{3\epsilon_o} r dr$$

da cui $\frac{\sigma}{2\epsilon_o} R = \frac{\rho}{3\epsilon_o} \frac{R^2}{2}$ e quindi $\sigma = \rho R / 3 = 5.3 \mu\text{C/m}^2$



3. Applicando la legge di Gauss, il flusso del campo elettrico uscente da una superficie sferica di raggio generico r assume l'espressione $\Phi(\vec{E}_o) = 4\pi r^2 E_o$. Il campo elettrico $E_o(r)$ ed il potenziale $V_o(r)$ assumono le espressioni

$$\left\{ \begin{array}{l} r < R_1 \\ R_1 < r < R_2 \\ r > R_2 \end{array} \right. \quad E_o = \begin{cases} 0 \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2} \right) \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \left\{ \begin{array}{l} r < R_1 \\ R_1 < r < R_2 \\ r > R_2 \end{array} \right. \quad V_o(r) = \begin{cases} V_o(R_1) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) \\ \int_r^{R_2} E_o dr + V_o(R_2) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} \left[3R_2^2 - r^2 - \frac{2R_1^3}{r} \right] \\ \int_r^\infty E_o dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{r} \right) \end{cases}$$

Il lavoro esterno per spostare la carica q nel centro vale $L_{ext} = q[V_o(0) - V_o(\infty)] = \frac{q\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) = 0.87 \text{ J}$

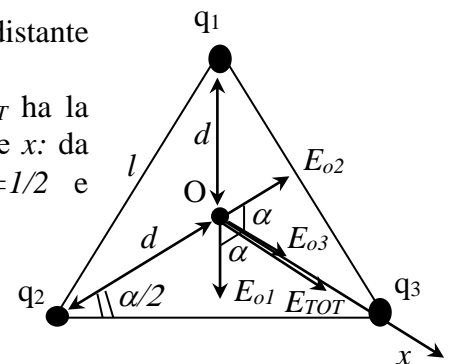
4. Il campo elettrico totale nel punto O è dato dalla somma vettoriale dei tre campi elettrici generati da $q_1=q$, $q_2=q$, $q_3=-q$. Tutti e tre i vettori hanno la stessa intensità $E_{o1} = E_{o2} = E_{o3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}$ perché il punto O è equidistante

dalle tre cariche. Per la simmetria del sistema il campo totale E_{TOT} ha la direzione dell'asse x , e si ottiene proiettando i tre vettori lungo l'asse x : da ciò $E_{TOT} = E_{o1} \cos \alpha + E_{o2} \cos \alpha + E_{o3}$ dove $\alpha = \pi/3$ e per cui $\cos \alpha = 1/2$ e

$$d = l/\sqrt{3}. \text{ Da cui } E_{TOT} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 l^2} = 3 \cdot 10^8 \text{ V/m}$$

Il potenziale totale si ottiene dalla somma algebrica dei tre potenziali

$$V(O) = \frac{q+q-q}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{q\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 l} = 2.6 \cdot 10^6 \text{ V.}$$



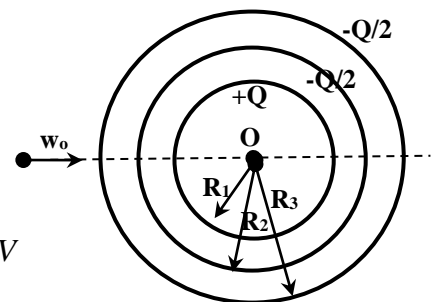
L'energia configurazionale infine vale $U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 l} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 l} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 l} = \frac{q^2 - q^2 - q^2}{4\pi\epsilon_0 l} = -7.5 \text{ J}$

5. Ciascun guscio conduttore genera un potenziale con le seguenti caratteristiche:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{int} = \frac{Q_{guscio}}{4\pi\epsilon_0 R_{guscio}} \\ V_{ext} = \frac{Q_{guscio}}{4\pi\epsilon_0 r} \end{array} \right.$$

Applicando la sovrapposizione degli effetti possono calcolarsi i potenziali elettrici dei vari gusci

$$\left\{ \begin{array}{l} V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{-Q/2}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{-Q/2}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0 \\ V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-Q/2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-Q/2}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2R_2} - \frac{1}{2R_3} \right) = 22.5 \text{ kV} \\ V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-Q/2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-Q/2}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_2} - \frac{1}{2R_3} \right) = 697 \text{ kV} \end{array} \right.$$



Applicando la conservazione dell'energia tra lo stato iniziale $E_o = \frac{1}{2}mw_o^2 + qV_o = \frac{1}{2}mw_o^2$

e lo stato generico $E = \frac{1}{2}mw^2 + qV$ possiamo ricavare la velocità $w = \sqrt{w_o^2 - \frac{2qV}{m}}$

da cui le velocità di attraversamento dei gusci sono $w_3=w_o=5\text{m/s}$, $w_2=3.94\text{ m/s}$ $w_1=1.43\text{ m/s}$

6. Potenziale elettrico generato da un filo indefinito orizzontale:

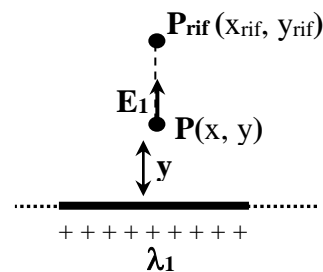
Il campo elettrico generato dal filo orizzontale è diretto lungo y e vale in P(x,y) : $E_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_o y}$

Assumendo il riferimento nel punto P_{rif} (x_{rif}, y_{rif})
il potenziale elettrico si calcola integrando il campo elettrico

$$V^{(1)} = \int_P^{P_{rif}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_y^{y_{rif}} E_1 dy = \int_y^{y_{rif}} \left(\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_o y} \right) dy = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_o} \ln\left(\frac{y_{rif}}{y} \right)$$

Analogamente per il filo verticale si trova il potenziale

$$V^{(2)} = \int_P^{P_{rif}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_x^{x_{rif}} E_2 dx = \int_x^{x_{rif}} \left(\frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_o x} \right) dx = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_o} \ln\left(\frac{x_{rif}}{x} \right)$$



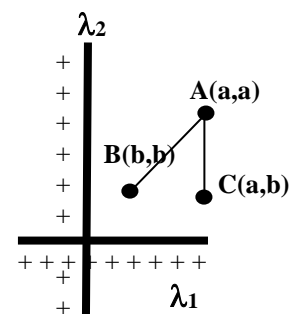
Il potenziale totale per la sovrapposizione degli effetti vale

$$V = V^{(1)} + V^{(2)} = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \left[\lambda_1 \ln\left(\frac{y_{rif}}{y} \right) + \lambda_2 \ln\left(\frac{x_{rif}}{x} \right) \right]$$

In condizioni di equilibrio il lavoro esterno per portare la carica q dal punto A al punto B è contrario a quello svolto dal campo elettrostatico

$$L_{AB}^{ext} = -L_{AB}^{el} = -q(V_A - V_B) = +q(V_B - V_A) =$$

$$L_{AB}^{ext} = \frac{q}{2\pi\epsilon_o} \left[\lambda_1 \ln\left(\frac{y_A}{y_B} \right) + \lambda_2 \ln\left(\frac{x_A}{x_B} \right) \right] = \frac{q(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\pi\epsilon_o} \ln\left(\frac{a}{b} \right) = 4.99\text{ J}$$



Analogamente $L_{AC}^{ext} = \frac{q\lambda_1}{2\pi\epsilon_o} \ln\left(\frac{a}{b} \right) = 1.25\text{ J}$ che è evidentemente inferiore