



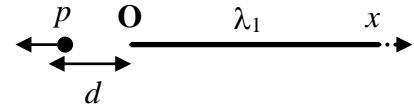
FISICA

A.A. 2022-2023

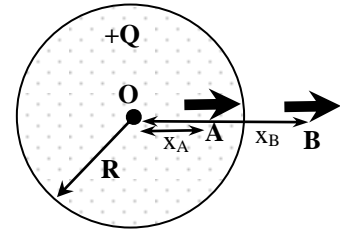
Ingegneria Gestionale

15° prova del 19 Maggio 2023

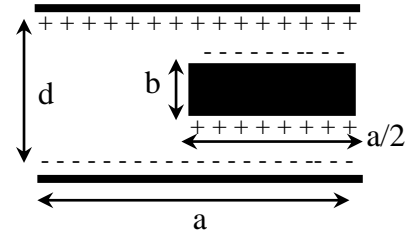
1. Sul semiasse positivo delle ascisse è distribuita una carica con densità lineare uniforme $\lambda_1 > 0$. Sul semiasse negativo a distanza d dall'origine è disposto un dipolo elettrico come in figura. Si determini il vettore campo elettrico prodotto dalla distribuzione lineare in prossimità del dipolo, e la forza attrattiva esercitata sul dipolo. [Dati: $\lambda_1 = 5 \mu\text{C}/\text{m}$, $p = 2 \text{nC}\cdot\text{m}$, $d = 5 \text{ cm}$]



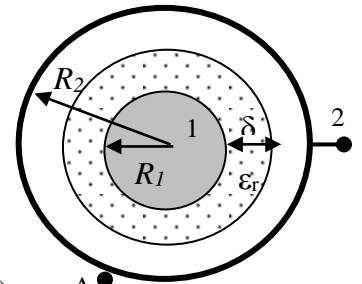
2. Una carica $Q = 100 \mu\text{C}$ è distribuita uniformemente all'interno di una sfera di raggio $R = 20 \text{ cm}$. In un punto A interno alla sfera, distante $x_A = 10 \text{ cm}$ dal centro O, è disposto un dipolo elettrico di momento $p = 3 \cdot 10^{-9} \text{ C}\cdot\text{m}$ orientato nella direzione radiale come descritto in figura. Determinare l'intensità la direzione ed il verso della forza elettrica cui è sottoposto il dipolo. Ripetere il calcolo della forza agente sul dipolo se posizionato in un punto B esterno alla sfera, alla distanza $x_B = 30 \text{ cm}$ dal centro O, ed orientato sempre nella direzione radiale.



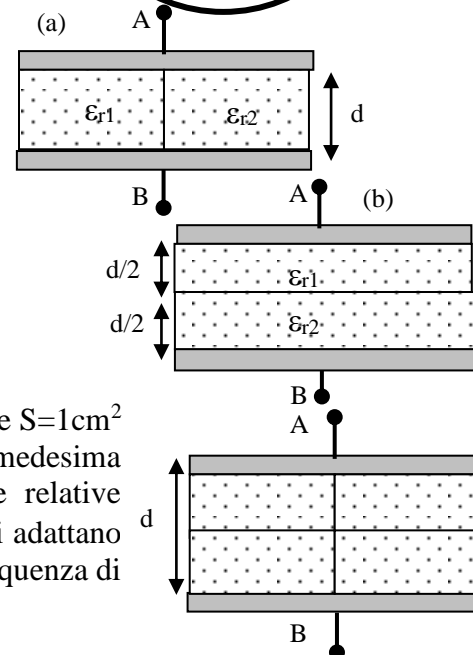
3. Calcolare la capacità del condensatore piano costituito da due armature quadrate di lato a poste alla distanza d come riportato in figura. All'interno del condensatore è posizionato un conduttore metallico parallelepipedo di spessore b e di sezione rettangolare $a \times a/2$. (suggerimento: ipotizzare la presenza di carica sulle armature superiore ed inferiore e per induzione sulle superfici del conduttore metallico con campo nullo all'interno)



4. Un condensatore sferico è costituito da due conduttori sferici concentrici di raggi $R_1 = 2 \text{ mm}$ e $R_2 = 4 \text{ mm}$. Le due armature si trovano inizialmente ad una differenza di potenziale $\Delta V_0 = V_1 - V_2 = 360\pi \text{ V}$, che diminuisce del 20% quando viene inserita una lastra omogenea di costante dielettrica relativa ϵ_r e di spessore $\delta = 1 \text{ mm}$. Determinare i valori della costante ϵ_r , della carica libera Q_{lib} sulle piastre.



5. Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto una capacità di $C_0 = 8 \mu\text{F}$. Successivamente viene riempito per metà superficie con un dielettrico di costante $\epsilon_{r1} = 1.4$ e per l'altra metà con un altro dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_{r2} = 1.6$ secondo lo schema in figura (a). Calcolare la nuova capacità ed il rapporto fra le cariche di polarizzazione sui due dielettrici. Ripetere l'esercizio per il caso (b) in cui i due dielettrici sono disposti uno sull'altro. Dimostrare che il rapporto fra le capacità dei due condensatori nei due casi vale sempre $C_a/C_b > 1$ per qualunque valore delle costanti dielettriche.



6. Un condensatore piano è costituito da due armature quadrate di sezione $S = 1 \text{ cm}^2$ distanziate $d = 1 \text{ mm}$. Avendo a disposizione 4 blocchi dielettrici di medesima forma parallelepipedica di materiali differenti con costanti dielettriche relative $\epsilon_{r1} = 1.5$, $\epsilon_{r2} = 2$, $\epsilon_{r3} = 3$, $\epsilon_{r4} = 1.2$ ma con sezioni $S/2$ e spessori $d/2$ che ben si adattano a riempire completamente lo spazio fra le armature, determinare quale sequenza di dielettrici garantisce la capacità minima e quale la capacità massima.

7. Un condensatore è formato da due cilindri coassiali di lunghezza comune $L = 5 \text{ cm}$, e di raggio rispettivamente $R_1 = 5 \text{ mm}$ ed $R_2 = 8 \text{ mm}$. Esso è riempito con un dielettrico non omogeneo di costante dielettrica relativa funzione della distanza r dall'asse dei cilindri $\epsilon_r(r) = R_2/r$. Determinare la capacità complessiva del condensatore in esame.



FISICA

A.A. 2022-2023

Ingegneria Gestionale

Soluzioni della 15^a prova

1. Alla distanza generica x dall'origine O si trova la carica $dq = \lambda_1 dx$ che genera il contributo di campo elettrico $dE_o = \lambda_1 dx / 4\pi\epsilon_o (x+y)^2$ nel punto P a distanza y dall'origine. Tale contributo diretto lungo l'asse y (contrario all'asse x) quando integrato lungo tutto il semiasse positivo delle x fornisce un valore complessivo di campo elettrico pari a

$$E_o = \int dE_o = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+y)^2} = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_o y}$$

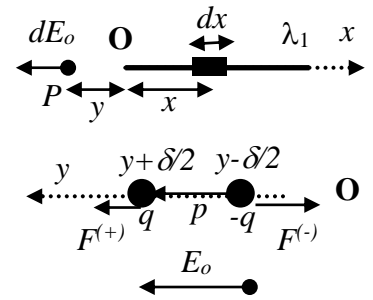
dipolo p a distanza y dall'origine O si può determinare a partire dall'energia

configurazionale del dipolo $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_o = -\frac{\lambda_1 p}{4\pi\epsilon_o y}$, calcolandone il gradiente rispetto alla

coordinata y libera del dipolo: $F_y = -\text{grad}_y U = \frac{d}{dy} \frac{\lambda_1 p}{4\pi\epsilon_o y} = -\frac{\lambda_1 p}{4\pi\epsilon_o y^2} = \mathbf{-0.036 N}$

La forza è quindi contraria all'asse y risultando quindi attrattiva diretta verso il filo uniformemente carico. Alternativamente tale forza può essere determinata come risultante della forza agente sulla carica positiva del dipolo $F^{(+)}$ posizionata in $y + \delta/2$ e della forza agente sulla carica negativa del dipolo $F^{(-)}$ posizionata in $y - \delta/2$. La risultante delle due forze vale quindi $F_y = F^{(+)} + F^{(-)} =$

$$= q \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_o (y + \delta/2)} - q \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_o (y - \delta/2)} = \frac{-q\lambda_1\delta}{4\pi\epsilon_o (y^2 - (\delta/2)^2)} \cong \frac{-\lambda_1 p}{4\pi\epsilon_o y^2}$$



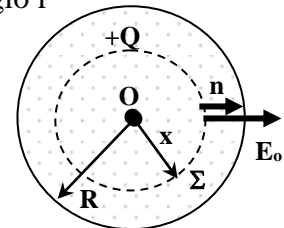
2. Calcolo del campo elettrico della distribuzione

Dapprima si calcola il flusso di campo elettrico uscente da una sfera di raggio r

concentrica alla distribuzione data $\Phi_{\Sigma}(E_o) = \iint_{\Sigma} \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = E_o (4\pi r^2)$

Applicando la legge di Gauss quando la superficie Σ risulta interna ($r < R$)

$$\Phi_{\Sigma_{\text{int}}} = E_{o_{\text{int}}} (4\pi r^2) = \frac{\rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)}{\epsilon_o} \quad \text{da cui} \quad E_{o_{\text{int}}} = \frac{\rho}{3\epsilon_o} r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^3} r$$



La forza agente su di un dipolo disposto internamente nel punto A vale

$$\vec{F} = -\nabla U_{\text{dipolo}} = -\nabla(-\vec{p} \cdot \vec{E}_o) = \nabla \left(\frac{Qp}{4\pi\epsilon_o R^3} r \right) \quad \text{da cui} \quad F_r = \frac{Qp}{4\pi\epsilon_o R^3} = \mathbf{0.337 N} \quad (\text{verso l'esterno})$$

(si noti che la forza è indipendente dalla posizione del punto A!)

Facoltativo: Applicando la legge di Gauss quando la superficie Σ risulta esterna ($r > R$)

$$\Phi_{\Sigma_{\text{ext}}} = E_{o_{\text{ext}}} (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_o} \quad \text{da cui} \quad E_{o_{\text{ext}}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2}$$

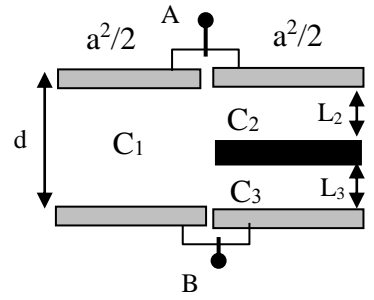
la forza agente su un dipolo esterno è quindi $\vec{F} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}_o) = \nabla \left(\frac{Qp}{4\pi\epsilon_o r^2} \right)$

che per $r = x_B$ fornisce il valore $F_r = -2 \frac{Qp}{4\pi\epsilon_o r^3} = \mathbf{0.2 N}$ (verso l'interno)

3. Il dispositivo può essere visto come un condensatore di capacità $C_1 = \epsilon_o \frac{a^2/2}{d}$ locato nel semispazio sinistro in parallelo con la serie dei due

condensatori del semispazio destro $C_2 = \epsilon_o \frac{a^2/2}{L_2}$ e $C_3 = \epsilon_o \frac{a^2/2}{L_3}$. Questi ultimi sono dotati di una capacità complessiva $C_{serie} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \epsilon_o \frac{a^2/2}{L_2 + L_3} = \epsilon_o \frac{a^2/2}{d-b}$. La capacità totale è quindi data dal

parallelo di C_1 e C_{serie} $C_{tot} = C_1 + C_{serie} = \epsilon_o a^2 \frac{2d-b}{2(d-b)}$.



4. In un condensatore sferico in presenza o meno del dielettrico (casi a, b) le linee di forza del campo elettrico E sono sempre radiali dirette dalla carica positiva $+Q_{lib}$ verso la carica negativa $-Q_{lib}$. Per Gauss il campo elettrico è non nullo solo nello spazio interno e vale $E(r) = Q_{lib}/4\pi\epsilon_o\epsilon_r r^2$ valida per tutti i punti interni del condensatore ($R_1 < r < R_2$). In particolare nel caso a) il campo elettrico è nel vuoto e vale $E_o(r) = D(r)/\epsilon_o = Q_{lib}/4\pi\epsilon_o r^2$ mentre in presenza di dielettrico (caso b) vale $E(r) = Q_{lib}/4\pi\epsilon_o\epsilon_r r^2$. In generale la differenza di potenziale fra i due conduttori si ottiene integrando il campo elettrico lungo un percorso radiale da R_1 ad R_2 ; nel caso (a) in assenza di dielettrico si ottiene $V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E_o dr = \frac{Q_{lib}}{4\pi\epsilon_o} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_{lib}}{4\pi\epsilon_o} \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}$ dove è stato

integrato il campo elettrico nel vuoto E_o . Nel caso (b) invece il valore di E nel dielettrico si abbassa riducendo la differenza di potenziale

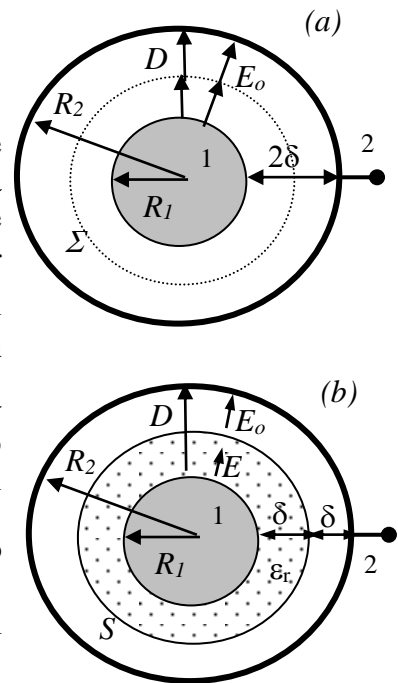
$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_1+\delta} E dr + \int_{R_1+\delta}^{R_2} E_o dr = \frac{Q_{lib}}{4\pi\epsilon_o} \left(\int_{R_1}^{R_1+\delta} \frac{1}{\epsilon_r r^2} dr + \int_{R_1+\delta}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \right) = \frac{Q_{lib}}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{\epsilon_r R_1 \cdot (R_1 + \delta)} + \frac{R_2 - R_1 - \delta}{(R_1 + \delta) \cdot R_2} \right).$$

Imponendo che il rapporto fra le due differenze di potenziale (caso b/caso a) debba valere 0.8 si ricava il valore di ϵ_r : $\frac{1}{\epsilon_r} \frac{\delta}{R_1 \cdot (R_1 + \delta)} + \frac{\delta}{(R_1 + \delta) \cdot R_2} = 0.8 \frac{2\delta}{R_1 \cdot R_2}$ da cui semplificando per δ ,

$$\frac{1}{\epsilon_r} = R_1 \cdot (R_1 + \delta) \left[\frac{1.6}{R_1 \cdot R_2} - \frac{1}{(R_1 + \delta) \cdot R_2} \right] = R_1 \cdot (R_1 + \delta) \left[\frac{0.6R_1 + 1.6\delta}{(R_1 + \delta) \cdot R_2 \cdot R_1} \right] = 0.6 \frac{R_1}{R_2} + 1.6 \frac{\delta}{R_2} = 0.7$$

da cui si ricava $\epsilon_r = 1.43$. La carica libera si ricava dal valore di $\Delta V_o = 360\pi$ nel caso (a) da cui

$$Q_{lib} = 4\pi\epsilon_o \Delta V_o \frac{R_1 R_2}{2\delta} = 5.02 \cdot 10^{-10} \text{ C.}$$



5. Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto capacità $C_o = \epsilon_o S/d$ dove S è la sua sezione e d la distanza fra le armature. Quando viene riempito con due dielettrici di costanti dielettriche relative ϵ_{r1} ϵ_{r2} come in figura a, la capacità complessiva può pensarsi come il parallelo delle due capacità che competono ai due condensatori di metà superficie $S/2$:

$$C_a = C_1 + C_2 = \epsilon_o \epsilon_{r1} \frac{S/2}{d} + \epsilon_o \epsilon_{r2} \frac{S/2}{d} = \epsilon_o \frac{S}{d} \left(\frac{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}{2} \right) = C_o \left(\frac{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}{2} \right) = 1.5 C_o = 12 \mu\text{F}.$$

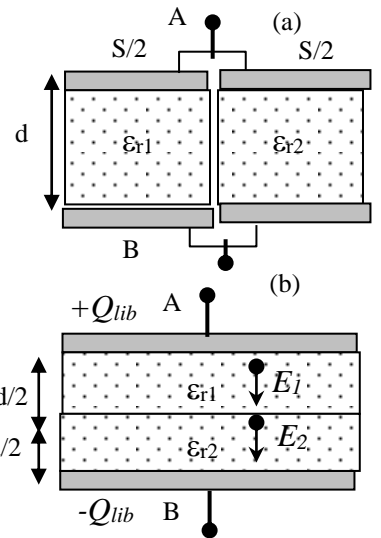
Nel caso (b), posta sul conduttore A la carica Q_{lib} , i campi elettrici nei due dielettrici sono rispettivamente a $E_1 = \sigma_{lib} / \epsilon_o \epsilon_{r1} = Q_{lib} / S \epsilon_o \epsilon_{r1}$ e $E_2 = Q_{lib} / S \epsilon_o \epsilon_{r2}$ (campi uniformi). La differenza di potenziale che si

instaura fra le due armature è $V_A - V_B = \int_A^B E dl = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = \frac{Q_{lib} d}{2 S \epsilon_o} \frac{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}$ e quindi la capacità

$$C_b = \frac{Q_{lib}}{V_A - V_B} = \epsilon_o \frac{S}{d} \left(\frac{2 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \right) = C_o \left(\frac{2 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \right) = 11.95 \mu\text{F} \text{ e}$$

E' facile trovare che vale sempre $C_a > C_b$. Ciò corrisponde alla condizione $\left(\frac{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}{2} \right) > \left(\frac{2 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \right)$

da cui $\epsilon_{r1}^2 - 2 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} + \epsilon_{r2}^2 > 0$ e quindi $(\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2})^2 > 0$ che è sempre vera se $\epsilon_{r1} \neq \epsilon_{r2}$.



6. Il condensatore può essere visto come formato da 4 condensatori di sezione $S/2$ e spessore $d/2$ di capacità generica $C = \epsilon_o \epsilon_r \frac{S/2}{d/2} = \epsilon_r C_o$

I condensatori sono disposti in modo tale che A e B sono in serie tra loro dando vita ad una capacità del lato sinistro

$$C_s = \frac{C_A C_B}{C_A + C_B} = C_o \frac{\epsilon_A \epsilon_B}{\epsilon_A + \epsilon_B} \text{ così come i condensatori C e D sono tra}$$

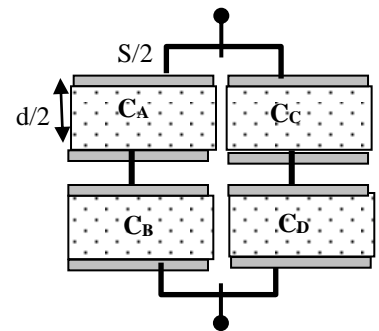
loro in serie dando luogo ad una capacità complessiva del lato destro $C_d = \frac{C_C C_D}{C_C + C_D} = C_o \frac{\epsilon_C \epsilon_D}{\epsilon_C + \epsilon_D}$

La capacità totale del sistema si ottiene calcolando il parallelo complessivo

$$C_{tot} = C_s + C_d = C_o \left(\frac{\epsilon_A \epsilon_B}{\epsilon_A + \epsilon_B} + \frac{\epsilon_C \epsilon_D}{\epsilon_C + \epsilon_D} \right) = C_o \frac{\epsilon_A \epsilon_B \epsilon_C + \epsilon_A \epsilon_B \epsilon_D + \epsilon_A \epsilon_C \epsilon_D + \epsilon_B \epsilon_C \epsilon_D}{(\epsilon_A + \epsilon_B)(\epsilon_C + \epsilon_D)}. \text{ Si noti che il}$$

numeratore è indipendente dalla disposizione di ABCD mentre per minimizzare/massimizzare la capacità occorre massimizzare/minimizzare il denominatore. Nel nostro caso il valore minimo del denominatore si ha per $(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r4})(\epsilon_{r2} + \epsilon_{r3}) = 13.5$ cui corrisponde la capacità $C_{max} = 1.65 \text{ pF}$

ed il massimo $(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})(\epsilon_{r3} + \epsilon_{r4}) = 14.7$ cui corrisponde la capacità $C_{min} = 1.52 \text{ pF}$



7. Il vettore campo elettrico, come in ogni condensatore ideale, è non nullo solo nello spazio fra le armature del condensatore, avendo intensità $E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L (R_2/r)} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L R_2}$ (per $R_1 < r < R_2$)

risulta inaspettatamente di intensità costante in tutto il condensatore. Questa condizione è dovuta alla particolare disomogeneità del dielettrico che compensa il tradizionale andamento $1/r$ che E avrebbe avuto se non ci fosse stato il dielettrico. La differenza di potenziale fra le due armature si

calcola quindi come $\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \frac{R_2 - R_1}{R_2}$, da cui la capacità

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 2\pi\epsilon_0 L \frac{R_2}{R_2 - R_1} = 7.4 \text{ pF}$$