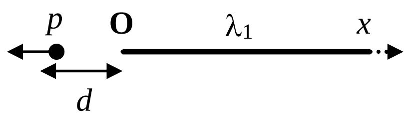
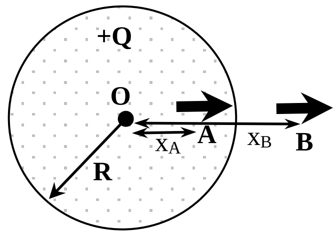
FISICA

A.A. 2024-2025
Ingegneria Gestionale
16° prova del 26 Maggio 2025

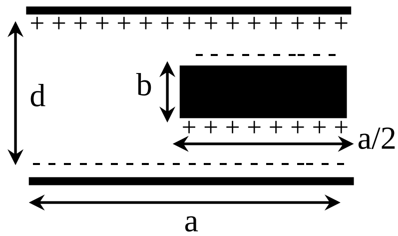
1. Sul semiasse positivo delle ascisse è distribuita una carica con densità lineare uniforme $\lambda_1>0$. Sul semiasse negativo a distanza d dall'origine è disposto un dipolo elettrico come in figura. Si determini il vettore campo elettrico prodotto dalla distribuzione lineare in prossimità del dipolo, e la orza attrattiva esercitata sul dipolo. [Dati: λ_1 = 5μC/m, p=2nC*m, d=5 cm]



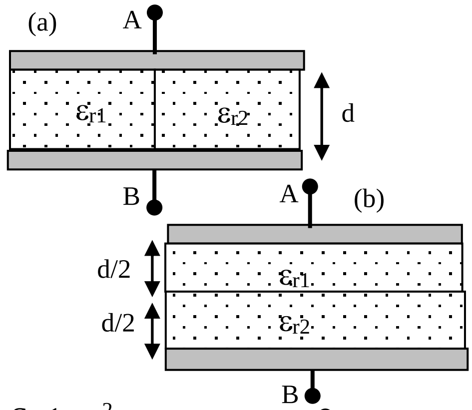
2. Una carica Q=100μC è distribuita uniformemente all'interno di una sfera di raggio R=20cm. In un punto A interno alla sfera, distante x_A=10cm dal centro O, è disposto un dipolo elettrico di momento $p=3\cdot10^{-9}$Cm orientato nella direzione radiale come descritto in figura. Determinare l'intensità la direzione ed il verso della forza elettrica cui è sottoposto il dipolo. **R**ipetere il calcolo della forza agente sul dipolo se posizionato in un punto B esterno alla sfera, alla distanza x_B=30cm dal centro O, ed orientato sempre nella direzione radiale.



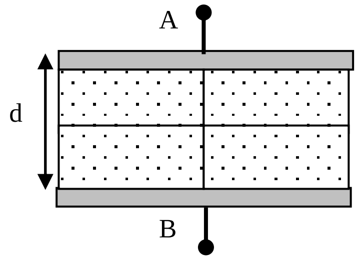
3. Calcolare la capacità del condensatore piano costituito da due armature quadrate di lato a poste alla distanza d come riportato in figura. All'interno del condensatore è posizionato un conduttore metallico parallelepipedo di spessore b e di sezione rettangolare a X $a/2$. (suggerimento: ipotizzare la presenza di carica sulle armature superiore ed inferiore e per induzione sulle superfici del condutture metallico con campo nullo all'interno)



4. Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto una capacità di $C_o=8\mu F$. Successivamente viene riempito per metà superficie con un dielettrico di costante $\varepsilon_{r1}=1.4$ e per l'altra metà con un altro dielettrico di costante dielettrica relativa $\varepsilon_{r2}=1.6$ secondo lo schema in figura (a). Calcolare la nuova capacità ed il rapporto fra le cariche di polarizzazione sui due dielettrici. Ripetere l'esercizio per il caso (b) in cui i due dielettrici sono disposti uno sull'altro. Dimostrare che il rapporto fra le capacità dei due condensatori nei due casi vale sempre $C_a/C_b>1$ per qualunque valore delle costanti dielettriche.



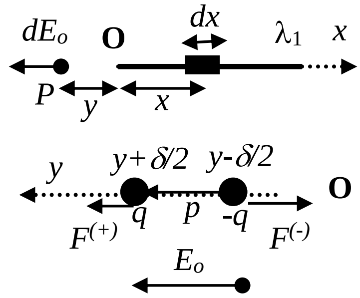
5. Un condensatore piano è costituito da due armature quadrate di sezione S=1cm^2 distanziate d=1mm. Avendo a disposizione 4 blocchi dielettrici di medesima forma parallelepipeda di materiali differenti con costanti dielettriche relative ε_{r1}=1.5, ε_{r1}=2, ε_{r3}=3, ε_{r4}=1.2 ma con sezioni S/2 e spessori d/2 che ben si adattano a riempire completamente lo spazio fra le armature, determinare quale sequenza di dielettrici garantisce la capacità minima e quale la capacità massima.



6. Un condensatore è formato da due cilindri coassiali di lunghezza comune L=5cm, e di raggio rispettivamente R_1=5mm ed R_2=8mm. Esso è riempito con un dielettrico non omogeneo di costante dielettrica relativa funzione della distanza r dall'asse dei cilindri $\varepsilon_r(r)=R_2/r$. Determinare la capacità complessiva del condensatore in esame.

FISICA

A.A. 2024-2025
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 16ª prova

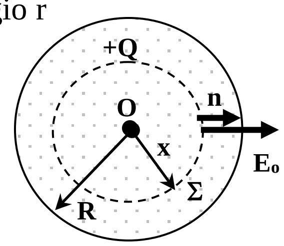


1. Alla distanza generica x dall'origine O si trova la carica $dq=\lambda_1 dx$ che genera il contributo di campo elettrico $dE_o = \lambda_1 dx / 4\pi\varepsilon_o (x+y)^2$ nel punto P a distanza y dall'origine. Tale contributo diretto lungo l'asse y (contrario all'asse x) quando integrato lungo tutto il semiasse positivo delle x fornisce un valore complessivo di campo elettrico pari a $E_o = \int dE_o = \dfrac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^\infty dx/(x+y)^2 = \dfrac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o y}$. La forza cui è sottoposto un dipolo p a distanza y dall'origine O si può determinare a partire dall'energia configurazionale del dipolo $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}_o = -\dfrac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y}$, calcolandone il gradiente rispetto alla coordinata y libera del dipolo: $F_y = -grad_y U = \dfrac{d}{dy}\dfrac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y} = -\dfrac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y^2} =$ **-0.036 N**

La forza è quindi contraria all'asse y risultando quindi attrattiva diretta verso il filo uniformemente carico. Alternativamente tale forza può essere determinata come risultante della forza agente sulla carica positiva del dipolo $F^{(+)}$ posizionata in $y+\delta/2$ e della forza agente sulla carica negativa del dipolo $F^{(-)}$ posizionata in $y+\delta/2$. La risultante delle due forze vale quindi $F_y = F^{(+)} + F^{(-)} =$

$$= q\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o (y+\delta/2)} - q\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o (y-\delta/2)} = \frac{-q\lambda_1\delta}{4\pi\varepsilon_o \left(y^2 - (\delta/2)^2\right)} \cong \frac{-\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y^2}$$

2. Calcolo del campo elettrico della distribuzione



Dapprima si calcola il flusso di campo elettrico uscente da una sfera di raggio r concentrica alla distribuzione data $\Phi_\Sigma(E_o) = \iint_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = E_o(4\pi r^2)$

Applicando la legge di Gauss quando la superficie Σ risulta interna (r<R)

$$\Phi_{\Sigma int} = E_{o int}(4\pi r^2) = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\varepsilon_o} \quad \text{da cui} \quad E_{o int} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o} r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^3}$$

La forza agente su di un dipolo disposto internamente nel punto A vale

$$\vec{F} = -\nabla U_{dipolo} = -\nabla\left(-\vec{p}\cdot\vec{E}_o\right) = \nabla\left(\frac{Qp}{4\pi\varepsilon_o R^3} r\right) \quad \text{da cui} \quad F_r = \frac{Qp}{4\pi\varepsilon_o R^3} = \mathbf{0.337\ N} \ \text{(verso l'esterno)}$$

(si noti che la forza è indipendente dalla posizione del punto A!)

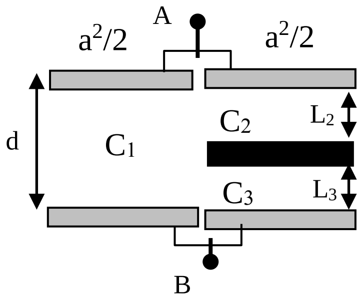
Facoltativo: Applicando la legge di Gauss quando la superficie Σ risulta esterna (r>R)

$$\Phi_{\Sigma ext} = E_{oext}(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \text{da cui} \quad E_{oext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

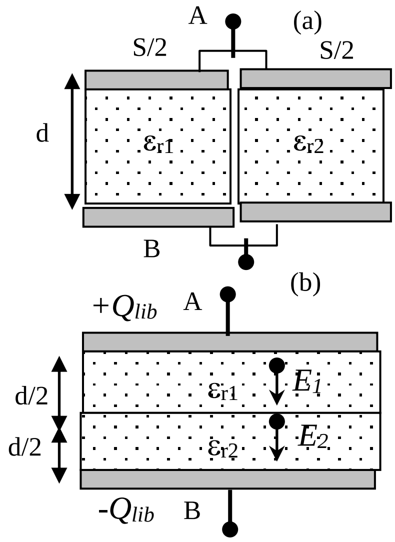
la forza agente su un dipolo esterno è quindi $\vec{F} = \nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}_o\right) = \nabla\left(\dfrac{Qp}{4\pi\varepsilon_o r^2}\right)$

che per $r=x_B$ fornisce il valore $F_r = -2\dfrac{Qp}{4\pi\varepsilon_o r^3} =$ **0.2 N** (verso l'interno)

3. Il dispositivo può essere visto come un condensatore di capacità $C_1 = \varepsilon_o \dfrac{a^2/2}{d}$ locato nel semispazio sinistro in parallelo con la serie dei due condensatori del semispazio destro $C_2 = \varepsilon_o \dfrac{a^2/2}{L_2}$ e $C_3 = \varepsilon_o \dfrac{a^2/2}{L_3}$. Questi ultimi sono dotati di una capacità complessiva $C_{serie} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \varepsilon_o \dfrac{a^2/2}{L_2 + L_3} = \varepsilon_o \dfrac{a^2/2}{d-b}$. La capacità totale è quindi data dal parallelo di C1 e Cserie $C_{tot} = C_1 + C_{serie} = \varepsilon_o a^2 \dfrac{2d-b}{2(d-b)}$.



4. Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto capacità $C_o = \varepsilon_o S/d$ dove S è la sua sezione e d la distanza fra le armature. Quando viene riempito con due dielettrici di costanti dielettriche relative ε_{r1} ε_{r2} come in figura *a*, la capacità complessiva può pensarsi come il parallelo delle due capacità che competono ai due condensatori di metà superficie *S/2*:



$$C_a = C_1 + C_2 = \varepsilon_o \varepsilon_{r1} \frac{S/2}{d} + \varepsilon_o \varepsilon_{r2} \frac{S/2}{d} = \varepsilon_o \frac{S}{d}\left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right) = C_o\left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right) =$$

$=1.5\ C_o = 12\mu F$.

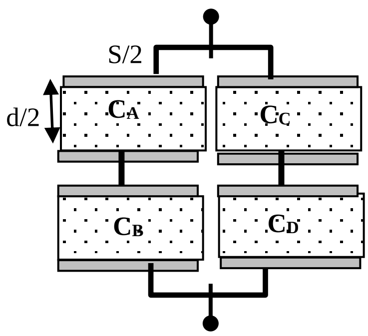
Nel caso (*b*), posta sul conduttore *A* la carica Q_{lib},, i campi elettrici nei due dielettrici sono rispettivamente a $E_1 = \sigma_{lib}/\varepsilon_o \varepsilon_{r1} = Q_{lib}/S\varepsilon_o \varepsilon_{r1}$ e $E_2 = Q_{lib}/S\varepsilon_o \varepsilon_{r2}$ (campi uniformi). La differenza di potenziale che si instaura fra le due armature è $V_A - V_B = \int_A^B E dl = E_1 \dfrac{d}{2} + E_2 \dfrac{d}{2} = \dfrac{Q_{lib} d}{2S\varepsilon_o} \dfrac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}$ e quindi la capacità

$$C_b = \frac{Q_{lib}}{V_A - V_B} = \varepsilon_o \frac{S}{d}\left(\frac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right) = C_o\left(\frac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right) = 11.95\mu F \text{ e}$$

E' facile trovare che vale sempre $C_a > C_b$. Ciò corrisponde alla condizione $\left(\dfrac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right) > \left(\dfrac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right)$

da cui $\varepsilon_{r1}^2 - 2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r2}^2 > 0$ e quindi $(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})^2 > 0$ che è sempre vera se $\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$.

5. Il condensatore può essere visto come formato da 4 condensatori di sezione S/2 e spessore d/2 di capacità generica $C = \varepsilon_o \varepsilon_r \dfrac{S/2}{d/2} = \varepsilon_r C_o$



I condensatori sono disposti in modo tale che A e B sono in serie tra loro dando vita ad una capacità del lato sinistro $C_s = \dfrac{C_A C_B}{C_A + C_B} = C_o \dfrac{\varepsilon_A \varepsilon_B}{\varepsilon_A + \varepsilon_B}$ così come i condensatori C e D sono tra loro in serie dando luogo ad una capacità complessiva del lato destro $C_d = \frac{C_C C_D}{C_C + C_D} = C_d \frac{\varepsilon_C \varepsilon_D}{\varepsilon_C + \varepsilon_D}$

La capacità totale del sistema si ottiene calcolando il parallelo complessivo $C_{tot} = C_s + C_d = C_o \left(\frac{\varepsilon_A \varepsilon_B}{\varepsilon_A + \varepsilon_B} + \frac{\varepsilon_C \varepsilon_D}{\varepsilon_C + \varepsilon_D} \right) = C_o \frac{\varepsilon_A \varepsilon_B \varepsilon_C + \varepsilon_A \varepsilon_B \varepsilon_D + \varepsilon_A \varepsilon_C \varepsilon_D + \varepsilon_B \varepsilon_C \varepsilon_D}{(\varepsilon_A + \varepsilon_B)(\varepsilon_C + \varepsilon_D)}$. Si noti che il numeratore è indipendente dalla disposizione di ABCD mentre per minimizzare/massimizzare la capacità occorre massimizzare/minimizzare il denominatore. Nel nostro caso il valore minimo del denominatore si ha per $(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r4})(\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}) = 13.5$ cui corrisponde la capacità **C_{max}=1.65pF**
ed il massimo $(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})(\varepsilon_{r3} + \varepsilon_{r4}) = 14.7$ cui corrisponde la capacità **C_{min}=1.52pF**

6. Il vettore campo elettrico, come in ogni condensatore ideale, è non nullo solo nello spazio fra le armature del condensatore, avendo intensità $E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o r L (R_2/r)} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o L R_2}$ (per $R_1<r<R_2$) risulta inaspettatamente di intensità costante in tutto il condensatore. Questa condizione è dovuta alla particolare disomogeneità del dielettrico che compensa il tradizionale andamento 1/r che E avrebbe avuto se non ci fosse stato il dielettrico. La differenza di potenziale fra le due armature si calcola quindi come $\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o L} \frac{R_2 - R_1}{R_2}$, da cui la capacità

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 2\pi\varepsilon_o L \frac{R_2}{R_2 - R_1} = \mathbf{7.4\ pF}$$