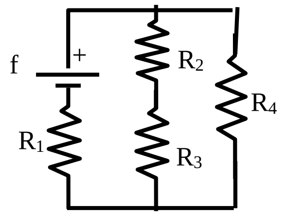
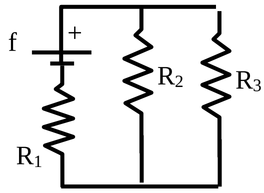
FISICA

A.A. 2022-2023
Ingegneria Gestionale
Testo della 16° prova

Da scansionare ed inviare per email entro sabato 27 maggio

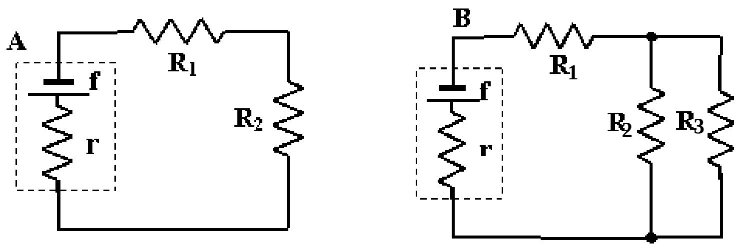


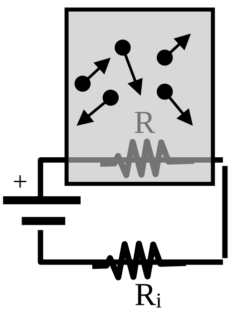
1. Si calcoli l'espressione della potenza dissipata sui resistori R_2, R_3 ed R_4, [f=10V, R_1=2kΩ, R_2=3kΩ, R_3=5kΩ, R_4=8kΩ]



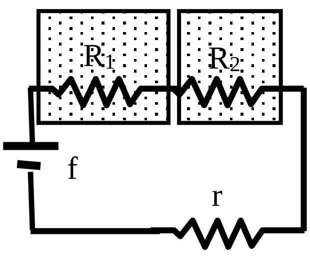
2. Si calcoli il valore minimo della resistenza R_1, per limitare contemporaneamente la corrente e la potenza dissipata sulla resistenza R_1 al di sotto dei valori massimi rispettivamente consentiti I_{max}=2mA, P_{max}=10mW. [Dati f=10V, R_2=4kΩ, R_3=4kΩ]]

3. La potenza erogata dal generatore di forza elettromotrice f nelle resistenze R_1 e R_2 in figura A e la stessa erogata da f nelle resistenze R_1, R_2 e R_3 in figura B. Calcolare la resistenza interna r del generatore. Dati: R_1=1 Ω ; R_2=15 Ω ; R_3=5 Ω .





4. Un grande ambiente assimilabile ad un recipiente con pareti rigide contiene n=4 kmoli di un gas monoatomico (He) alla temperatura uniforme di 30°C e alla pressione atmosferica. Il recipiente viene scaldato da una resistenza elettrica R=2Ω collegata ad un circuito con batteria di forza elettromotrice f=100V in continua come indicato in figura con resistenza interna incognita R_i. Il circuito elettrico viene azionato con un interruttore al tempo t=0. Dopo 5 minuti la temperatura del gas si è portata a 40°C. Trovare il valore della resistenza interna R_i. **Facoltativo**: calcolare il valore della pressione interna al recipiente dopo 5 minuti considerando costante il volume del recipiente. [La costante dei gas vale R=8314 J K^{-1} $kmol^{-1}$]

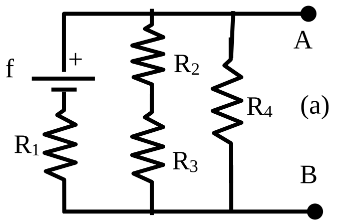


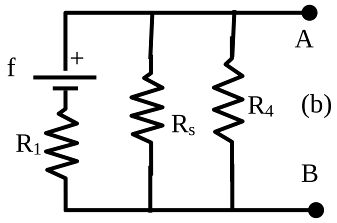
5. Il dispositivo in figura si compone di un circuito resistivo alimentato da una forza elettromotrice f=10kV. I due resistori principali R_1=7.5 kΩ, R_2=2 kΩ, sono utilizzati come scaldatori per aumentare la temperatura di due bollitori contenenti rispettivamente M_1=1kg e M_2=2kg di acqua distillata. La resistenza interna del circuito r=500 Ω tiene in conto di tutti gli effetti resistivi di fili e generatore. Determinare dopo quanti secondi la massa M_1 contenuta nel primo bollitore si porta dalla temperatura ambiente di 20°C (cui si trova inizialmente l'intero sistema) alla temperatura di 80°C. Determinare a quell'istante a quale temperatura si viene a trovare la massa d'acqua M_2 nel secondo bollitore (calore specifico acqua C=4187 J/kg, si trascurino le perdite termiche nei bollitori)

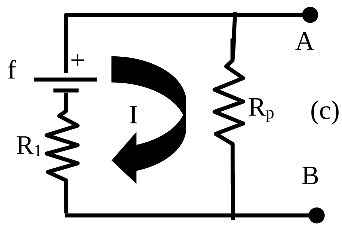
FISICA

A.A. 2022-2023
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 16° prova

1. Il circuito in figura a) è composto da due maglie ma può essere ridotto ad una maglia componendo i rami resistivi: nel ramo centrale la corrente attraversa in serie le resistenze R_2 ed R_3 cui può essere sostituita la resistenza serie $R_s=R_2+R_3$ figura b). Il ramo centrale ed il ramo resistivo a destra risultano in parallelo e possono essere sostituiti da una unica resistenza $R_p=(R_2+R_3)//R_4$ come in figura c). La corrente di maglia è data quindi dalla formula







$$I=\frac{f}{R_1+R_p} \quad \text{dove} \quad R_p=\frac{R_s\cdot R_4}{R_s+R_4}=\frac{(R_2+R_3)\cdot R_4}{R_2+R_3+R_4}=4\text{k}\Omega \quad \text{da cui} \quad \mathbf{I=1.67mA}$$

La differenza di potenziale fra i punti A e B vale per la legge di Ohm

$$V_A-V_B=I\cdot R_p=\mathbf{6.67V}$$

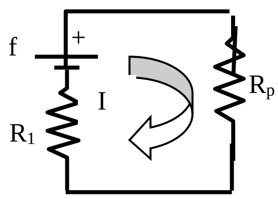
Da cui la corrente che transita in R_2 ed R_3 è $I_{23}=\frac{V_A-V_B}{R_s}=\mathbf{0.833\ mA}$

mentre la corrente che transita in R_4 è $I_4=\frac{V_A-V_B}{R_4}=\mathbf{0.833\ mA}$

Le potenze dissipate infine vengono calcolate dalle relazioni:

$$\begin{cases} P_{R2}=I_{23}^2\cdot R_2=2.78mW \\ P_{R3}=I_{23}^2\cdot R_3=2.78mW \\ P_{R4}=I_4^2\cdot R_4=5.56mW \end{cases}$$

2. Il circuito può ricondursi ad una sola maglia, calcolando la resistenza parallelo



$$R_p=\frac{R_2\cdot R_3}{R_1+R_3}=\frac{4k\Omega\cdot 4k\Omega}{8k\Omega}=2k\Omega$$

La corrente circolante nella maglia si calcola dividendo la forza elettromotrice fornita dalla batteria per la somma delle resistenze attraversate dalla medesima corrente di maglia

$$I=\frac{f}{R_1+R_p}\le I_{\max} \quad \text{da cui} \quad R_1\ge=\frac{f}{I_{\max}}-R_2=\frac{10}{0.001}\left(\frac{V}{A}\right)-2000\Omega=8000\Omega=8k\Omega$$

Che rappresenta la 1^a disequazione

La seconda condizione riguarda la potenza massima dissipabile su R_1. In generale la potenza dissipata P su una resistenza R attraversata da una intensità di corrente I si ottiene dalla espressione dell'effetto Joule combinato con la legge di Ohm

$$P=\Delta V\cdot I=(I\cdot R)\cdot I=I^2R=f^2\frac{R_1}{(R_1+R_p)^2}\le P_{\max}$$

Questo porta alla disequazione $\left(R_1 + R_p\right)^2 - \left(\frac{f^2}{P_{\max}}\right)R_1 \geq 0$ da cui $R_1^2 + \left(2R_p - \frac{f^2}{P_{\max}}\right)R_1 + R_p^2 \geq 0$

Le soluzioni sono $R_1 = \left(\frac{f^2}{2P_{\max}} - R_p\right) \pm \sqrt{\left(\frac{f^2}{2P_{\max}} - R_p\right)^2 - R_p^2} = \left(\frac{f^2}{2P_{\max}} - R_p\right) \pm \sqrt{\frac{f^4}{4P_{\max}^2} - \frac{f^2 R_p}{P_{\max}}} =$

Quindi la seconda disequazione è **R_1>5.23 kΩ oppure R_1< 764 Ω**

che messa a sistema con la prima disequazione **R_1>8 kΩ**

fornisce il risultato finale che soddisfa entrambe le limitazioni **R_1>8 kΩ**

3. Calcolo della potenza erogata ad una resistenza esterna

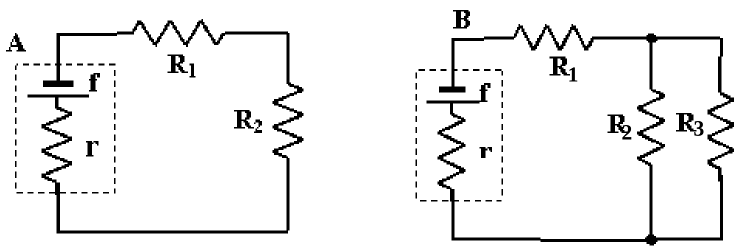
La corrente che circola nella maglia è $I = \frac{f}{R_{ext} + r}$

La potenza assorbita sulla resistenza esterna $P_{ext} = I^2 R_{ext} = \frac{f^2 R_{ext}}{\left(R_{ext} + r\right)^2}$

Generalmente se R_{ext} viene modificata dovrà modificarsi conseguentemente anche P_{ext}. Nel caso in esame invece fortuitamente la potenza rimane immutata. Questo succede solo se

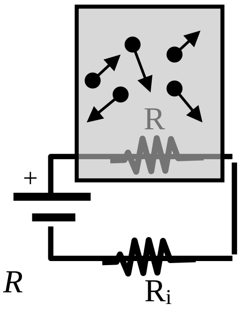
$$\frac{f^2 R_{ext,A}}{\left(R_{ext,A} + r\right)^2} = \frac{f^2 R_{ext,B}}{\left(R_{ext,B} + r\right)^2} \quad \text{ossia} \quad R_{ext,A}\left(R_{ext,B} + r\right)^2 = R_{ext,B}\left(R_{ext,A} + r\right)^2 \quad \text{da cui}$$

$$r^2\left(R_{ext,A} - R_{ext,B}\right) + R_{ext,A}R_{ext,B}^2 - R_{ext,B}R_{ext,A}^2 = 0 \quad \text{che porta alla} \quad r = \sqrt{R_{ext,A}R_{ext,B}}$$



Nel caso in esame $R_{ext,A} = R_1 + R_2 =$ **16 Ω,** mentre $R_{ext,B} = R_1 + R_2 // R_3 =$ **3.75 Ω,**
Per cui la resistenza interna è $r = \sqrt{R_{ext,A}R_{ext,B}}$ =**7.75 Ω,**

4. Il circuito elettrico formato da una sola maglia la **intensità di corrente elettrica** si calcola con la formula $I = \dfrac{f}{R + R_i}$



La **potenza dissipata** sulla resistenza R

Il **calore sviluppato** in un tempo **τ** è infine $Q = P \cdot \tau = \dfrac{f^2 R}{(R + R_i)^2}\tau$

Dalla quale si esplicita il valore della resistenza interna $R_i = \sqrt{\dfrac{f^2 R \cdot \tau}{Q}} - R$

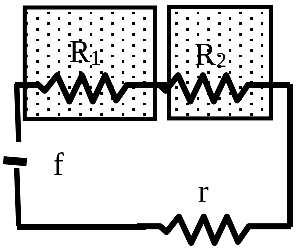
Il calore Q deve riscaldare n= moli di gas monoatomico: $Q = nc_v \Delta T = \dfrac{3}{2} nR_{gas}\Delta T = 4.988\ 10^5$ J

Combinando le equazioni si ottiene $R_i = \sqrt{\dfrac{2 f^2 R \cdot \tau}{3nR_{gas}\Delta T}} - R = \mathbf{1.47\ \Omega}$

Facoltativo:

Nelle transformazioni a volume costante $p = p_o \dfrac{T}{T_o} = 101300 \dfrac{273.15 + 40}{273.15 + 30}$ **= 1.046·10⁵ Pa**

5. Il circuito elettrico formato da una sola maglia



la **intensità di corrente elettrica** vale $I = \dfrac{f}{r + R_1 + R_2} = \mathbf{1A}$

La **potenza dissipata** per effetto Joule sulle resistenze

$$P_1 = I^2 R_1 = \frac{f^2 R_1}{(r + R_1 + R_2)^2} = \mathbf{7.5\ kW;} \quad P_2 = I^2 R_2 = \frac{f^2 R_2}{(r + R_1 + R_2)^2} = \mathbf{2\ kW;}$$

Il **calore sviluppato** in un tempo **τ** nei due bollitori è quindi

$$Q_1 = P_1 \tau = \frac{f^2 R_1}{(r + R_1 + R_2)^2}\tau \quad ; \quad Q_2 = P_2 \tau = \frac{f^2 R_2}{(r + R_1 + R_2)^2}\tau \qquad \text{in rapporto} \qquad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

Il calore necessario per portare il primo bollitore alla temperatura T_1=80°C si ottiene dalla equazione calorimetrica

$Q_1 = M_1 C(T_1 - T_{amb})$ **= 251 kJ** da cui il tempo che è necessario attendere è quindi **$\tau = Q_1/P_1$ = 33.5 s**

Dal raffronto tra i calori sviluppati tra i due bollitori $\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{M_2 C(T_2 - T_{amb})}{M_1 C(T_1 - T_{amb})}$

si ottiene la temperatura del secondo bollitore al tempo τ: $T_2 = T_{amb} + \left(\dfrac{M_1 R_2}{M_2 R_1}\right)(T_1 - T_{amn}) = \mathbf{28°C}$