INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO
ANALISI MATEMATICA II
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 17-07-2019

ESERCIZIO 1
Data la forma differenziale
$$\frac{2x}{1+y^2}dx - \frac{2x^2y}{(1+y^2)^2}dy$$
stabilire se è esatta e, in caso affermativo, calcolare una primitiva. Infine, utilizzare i risultati ottenuti per calcolare l'integrale
$$\oint_\gamma \frac{2x}{1+y^2}dx - \frac{2x^2y}{(1+y^2)^2}dy,$$
dove γ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 10.

SOLUZIONE
La forma è chiusa:
$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{-4xy}{(y^2+1)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$
Inoltre è definita in tutto $\mathbb{R}^2$, e quindi è esatta. Calcolo della primitiva:
$$F(x,y) = \int \frac{2x}{y^2+1}dx = \frac{x^2}{y^2+1} + \varphi(y),$$
e poi imponendo $\frac{\partial F}{\partial y} = Y$ troviamo che deve essere
$$\frac{-2x^2y}{(1+y^2)^2} + \varphi'(y) = \frac{-2x^2y}{(1+y^2)^2}$$
e quindi $\varphi' = 0$ e possiamo prendere $F(x,y) = \frac{x^2}{y^2+1}$. Per finire, essendo la forma esatta, il suo integrale su una curva chiusa come la circonferenza nel testo vale zero.

ESERCIZIO 2
Usando il teorema di Stokes, calcolare il seguente integrale:
$$\oint_{+\partial T} \vec{F} \cdot \vec{v}dt,$$
dove T é il triangolo di vertici $(2,0,0)$, $(0,6,0)$, $(0,0,3)$, il verso positivo di $+\partial T$ è quello che dall'alto risulta antiorario ed $\vec{F} = (2y^2z, 2xz, 2xy)$.

SOLUZIONE
Applicando il teorema di Stokes troviamo:
$$\oint_{+\partial T} \vec{F} \cdot \vec{v}dt = \int_{+T} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}d\sigma.$$
Si ha:
$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y^2z & 2xz & 2xy \end{vmatrix} = \mathbf{j}(2y^2 - 2y) + \mathbf{k}(2z - 4yz).$$

Per quanto riguarda T, esso giace sul piano passante per i tre vertici, che ha equazione $3x + y + 2z - 6 = 0$, e si proietta sul piano xy nel triangolo T_0 di vertici $(2,0), (0,6), (0,0)$ e quindi $T_0 = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 6 - 3x\}$. Utilizzando la parametrizzazione $z = 3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y$, $(x,y) \in T_0$, si ha:

$$\vec{n} = \frac{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}{\frac{\sqrt{14}}{2}}, \qquad d\sigma = \frac{\sqrt{14}}{2} dxdy$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
\int_{+T} \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{T_0} \left[\frac{1}{2}(2y^2 - 2y) + (2z - 4yz)\right]_{z=3-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y} dxdy \\
&= \iint_{T_0} (3y^2 - 14y + 6xy - 3x + 6) dxdy \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^{6-3x} (3y^2 - 14y + 6xy - 3x + 6) dy\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[y^3 - 7y^2 + 3xy^2 - 3xy + 6y\right]_{y=0}^{y=6-3x} dx \\
&= \int_0^2 [27(2-x)^3 - 63(2-x)^2 + 27x(2-x)^2 \\
&\qquad - 9x(2-x) + 18(2-x)] dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

perché

$$\begin{aligned}
27(2-x)^3 - 63(2-x)^2 + 27x(2-x)^2 - 9x(2-x) + 18(2-x) \\
&= 27(2-x)^3 + 9(2-x)^2(3x-7) + 9(2-x)^2 \\
&= 27(2-x)^3 - 27(2-x)^3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE Il calcolo diretto è molto più semplice. La frontiera del triangolo consiste di tre segmenti, γ_1 sul piano xy, γ_2 sul piano yz e γ_3 sul piano xz. Senza nemmeno parametrizzare la frontiera, si ha subito:

$$\begin{aligned}
\oint_{+\partial T} \vec{F} \cdot \vec{v} dt &= \int_{+\partial T} 2y^2 z dx + 2xz dy + 2xy dz \\
&= \int_{\gamma_1} 2y^2 z|_{z=0} dx + 2xz|_{z=0} dy + \int_{\gamma_2} 2xz|_{x=0} dy + 2xy|_{x=0} dz \\
&\qquad + \int_{\gamma_3} 2y^2 z|_{y=0} dx + 2xy|_{y=0} dz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

Sviluppare in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < \pi/6 \\ 1 & \pi/6 \le x \le \pi/3 \\ 0 & \pi/3 < x < 2\pi/3 \\ 1 & 2\pi/3 \le x \le 5\pi/6 \\ 0 & 5\pi/6 < x \le \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
La funzione è discontinua e quindi la convergenza non sarà totale. Si ha:

$$\begin{aligned} b_k =& \frac{2}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin kx dx + \frac{2}{\pi}\int_{2\pi/3}^{5\pi/6} \sin kx dx \\ =& \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_{2\pi/3}^{5\pi/6} \\ =& \frac{2}{k\pi}\left[\cos\frac{k\pi}{6} - \cos\frac{k\pi}{3} + \cos\frac{2k\pi}{3} - \cos\frac{5k\pi}{6}\right]. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left[\cos\frac{k\pi}{6} - \cos\frac{k\pi}{3} + \cos\frac{2k\pi}{3} - \cos\frac{5k\pi}{6}\right]\sin kx = \begin{cases} 1 & \pi/6 < x < \pi/3, \\ 1 & 2\pi/3 < x < 5\pi/6, \\ 1/2 & x = \pi/6, \pi/3, 2\pi/3, 5\pi/6, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. La funzione $f(x)$ è *pari* rispetto al punto $\frac{\pi}{2}$ e questo implica che $b_k = 0$ per k pari. In effetti, utilizzando l'identità

$$\begin{aligned} \cos\frac{k\pi}{6} - \cos\frac{k\pi}{3} + \cos\frac{2k\pi}{3} - \cos\frac{5k\pi}{6} =& \cos\left(k\pi - \frac{k\pi}{3}\right) - \cos\frac{k\pi}{3} - \cos\left(k\pi - \frac{k\pi}{6}\right) + \cos\frac{k\pi}{6} \\ =& (-1)^k \cos\frac{k\pi}{3} - \cos\frac{k\pi}{3} - (-1)^k\cos\frac{k\pi}{6} + \cos\frac{k\pi}{6} \\ =& \left[1 - (-1)^k\right]\left(\cos\frac{k\pi}{6} - \cos\frac{k\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

si trova che

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad k \text{ pari} \\ \frac{4}{(2m+1)\pi}\left(\cos\frac{(2m+1)\pi}{6} - \cos\frac{(2m+1)\pi}{3}\right) & \text{per} \quad k = 2m+1 \text{ dispari.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 4
Dopo aver determinato la soluzione stazionaria, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -6x & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 1, u(\pi,t) = \pi^3 + \pi + 1 & t > 0, \end{cases}$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x + x^3 & 0 \le x < \pi/6 \\ 2 + x + x^3 & \pi/6 \le x \le \pi/3 \\ 1 + x + x^3 & \pi/3 < x < 2\pi/3 \\ 2 + x + x^3 & 2\pi/3 \le x \le 5\pi/6 \\ 1 + x + x^3 & 5\pi/6 < x \le \pi. \end{cases}$$

Calcolare anche la velocità di convergenza alla soluzione stazionaria.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore in dimensione 1. La soluzione stazionaria si trova risolvendo il problema $\begin{cases} u_s'' = 6x, \\ u_s(0) = 1, u_s(\pi) = \pi^3 + \pi + 1, \end{cases}$, la cui soluzione è: $u_s(x) = x^3 + x + 1$. Ponendo $v(x,t) = u(x,t) - u_s(x)$, la funzione v deve risolvere il problema:

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ v(x,0) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

dove f è la funzione dell'esercizio precedente. Quindi, se i coefficienti b_k sono come nella soluzione dell'esercizio precedente,

$$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t) = x^3 + x + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin kx.$$

Ne segue che, essendo $\max_{[0,\pi]}|f(x)| = 1$ ed $\frac{L^2}{D} = \pi^2$ si ha:

$$|u(x,t) - u_s(x)| \le 4e^{-t} \qquad \text{per} \qquad t \ge \pi^2.$$

ESERCIZIO 5

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 24x^2 + 6t & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = e^x & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \sin x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica.

SOLUZIONE

Applicando la formula di D'Alembert troviamo:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}[e^{x+t} + e^{x-t}] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin y dy + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\int_{x-t+s}^{x+t-s} (24y^2 + 6s) dy\right] ds \\ =& e^x \cosh t + \frac{1}{2}\left[-\cos y\right]_{y=x-t}^{y=x+t} + \int_0^t \left[4y^3 + 3ys\right]_{y=x-t+s}^{y=x+t-s} ds \\ =& e^x \cosh t + \frac{1}{2}\left[-\cos(x+t) + \cos(x-t)\right] \\ &+ \int_0^t [4(x+t-s)^3 - 4(x-t+s)^3 + 6s(t-s)] ds \\ =& e^x \cosh t + \sin x \sin t + \left[-(x+t-s)^4 - (x-t+s)^4 + 3ts^2 - 2s^3\right]_{s=0}^{s=t} \\ =& e^x \cosh t + \sin x \sin t - 2x^4 + t^3 + (x+t)^4 + (x-t)^4 \\ =& e^x \cosh t + \sin x \sin t + 2t^4 + t^3 + 12x^2t^2. \end{aligned}$$

<u>Verifica</u>:

$u(x,0) = e^x; u_t(x,0) = \sin x;$

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} =& [e^x \cosh t - \sin x \sin t + 24t^2 + 6t + 24x^2] - [e^x \cosh t - \sin x \sin t + 24t^2] \\ =& 6t + 24x^2. \end{aligned}$$