

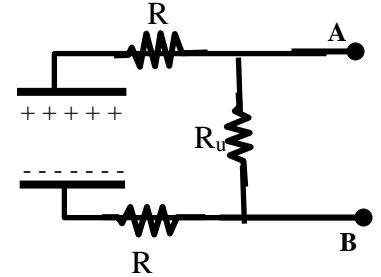


# FISICA

A.A. 2022-2023  
Ingegneria Gestionale  
Testo della 17° prova

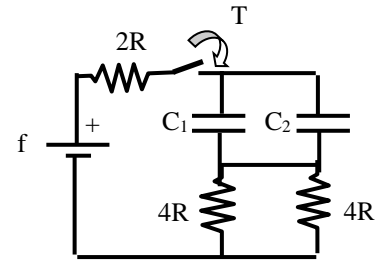
Da scansionare ed inviare per email entro lunedì 29 maggio

1. Una resistenza elettrica  $R_u$  è preposta a scaldare 200g di acqua inizialmente alla temperatura  $t=30^\circ\text{C}$ . La resistenza è alimentata da una rete elettrica con due resistenze uguali  $R$  ed un condensatore piano di capacità  $C$  che ha inizialmente energia  $U^{el}=10\text{kJ}$ . Ammettendo che la sola energia dissipata su  $R_u$  sia utile al riscaldamento dell'acqua, determinare la temperatura finale dell'acqua quando il condensatore è completamente scarico **Facoltativo**. Determinare la temperatura dell'acqua dopo  $t=10\mu\text{s}$  [Dati:  $R=10\text{k}\Omega$ ,  $R_u=30\text{k}\Omega$ ,  $C=1\mu\text{F}$ ].

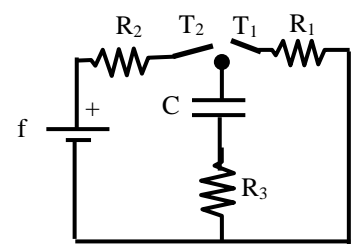


2. Un resistore di resistenza  $R=50\Omega$  è collegato, all'istante di tempo  $t=0$ , ad un condensatore carico di capacità  $C=15\mu\text{F}$ . Sapendo che l'energia dissipata dal resistore dopo un intervallo di  $\Delta t=2\text{ms}$  vale  $E_J=1.5\text{mJ}$  determinare la carica iniziale sulle armature del condensatore.

3. I due condensatori indicati in figura hanno carica inizialmente nulla prima della chiusura dell'interruttore  $T$ . Determinare la costante di tempo complessiva nel processo di carica dei condensatori che ha inizio in  $t=0$  quando l'interruttore  $T$  viene chiuso. Determinare anche la carica presente sul condensatore  $C_1$  dopo  $t=3\text{ms}$  dalla chiusura [ $f=10\text{V}$ ,  $R=1\text{k}\Omega$ ,  $C_1=8\mu\text{F}$ ,  $C_2=2\mu\text{F}$ ].



4. Sul condensatore  $C$  è inizialmente presente una carica  $q_0=1\mu\text{C}$ . Nell'istante  $t=0$  viene chiuso il solo tasto  $T_1$  in modo che il condensatore possa scaricarsi sulla resistenza  $R_1$ . Dopo un tempo  $t_1=10\text{ms}$  vengono azionati contemporaneamente gli interruttori  $T_1$  (da chiuso ad aperto) e  $T_2$  (da aperto a chiuso) così da poter ricaricare il condensatore tramite la forza elettromotrice  $f=3\text{V}$ . Determinare quanto tempo occorre per ricaricare il condensatore al livello di partenza  $q_0$ . [Dati:  $R_1=25\text{k}\Omega$ ,  $R_2=15\text{k}\Omega$ ,  $R_3=25\text{k}\Omega$ ,  $C=1\mu\text{F}$ ].





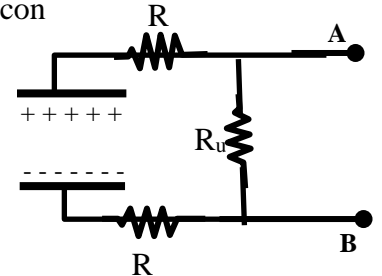
# FISICA

A.A. 2022-2023  
Ingegneria Gestionale  
Soluzioni della 17° prova

## 1. SCARICA DEL CONDENSATORE

Il condensatore si scarica sulle tre resistenze che vengono viste come una unica resistenza equivalente in serie  $R_{eq} = R + R_u + R = 2R + R_u = 50k\Omega$  con un tempo di scarica  $\tau = R_{eq}C = 50ms$

La carica nel condensatore segue la legge di scarica  $q(t) = Q_o \exp[-t/\tau]$  mentre l'energia immagazzinata dopo t scende con legge  $U^{el}(t) = \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{Q_o^2}{2C} \exp[-2t/\tau] = U_o^{el} \exp[-2t/\tau]$



L'abbassamento di energia nel condensatore dopo un tempo t è dovuto all'energia dissipata dalle 3 resistenze  $E_j = U^{el}(0) - U^{el}(t) = U_o^{el} \{1 - \exp[-2t/\tau]\} =$

Nel caso di scarica completa ( $t \rightarrow \infty$ )  $E_j = U_o = 10kJ$ , ma nel caso di scarica parziale ( $t = 10\mu s$ )  $E_j = 4J$

Sulla resistenza  $R_u$  viene dissipata una frazione di energia  $E_{Ru} = E_j \left( \frac{R_u}{R_u + 2R} \right) = \frac{3}{5} E_j$

Nel caso di scarica completa ( $t \rightarrow \infty$ )  $E_{Ru} = 6kJ$ , ma nel caso di scarica parziale ( $t = 10\mu s$ )  $E_{Ru} = 2.4J$

Dalla calorimetria  $E_{Ru} = c_{H2O} M (T_f - T_i)$  da cui  $T_f = T_i + E_{Ru} / c_{H2O} M$  ove si assume per il calore specifico dell'acqua  $c_{H2O} = 4187 J/Kg \text{ } ^\circ C$

Nel caso di scarica completa  $T_f = 37.16 \text{ } ^\circ C$ , nel caso di scarica parziale ( $t = 10\mu s$ )  $T_f = 30.003 \text{ } ^\circ C$

## 2. Processo di scarica di un condensatore

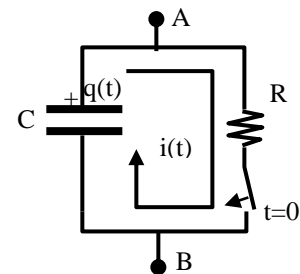
La differenza di potenziale ai capi del condensatore vale  $V_A - V_B = \frac{q}{C} = iR$

dove la corrente di scarica causa una diminuzione della carica del condensatore  $i = -\frac{dq}{dt}$

L'equazione differenziale risultante è quindi  $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$

con soluzione  $q(t) = q_o \exp(-t/RC)$

La **corrente nel circuito** è quindi  $i(t) = \frac{q(t)}{RC} = \frac{q_o \exp(-t/RC)}{RC}$



La **potenza dissipata** per effetto Joule sul resistore è  $P_j(t) = i^2(t)R = \frac{q_o^2}{RC^2} \exp(-2t/RC)$

che integrata dà luogo all'energia dissipata  $E_j = \int_0^{\Delta t} P_j(t) dt = \frac{q_o^2}{2C} [1 - \exp(-2\Delta t/RC)]$

(Allo stesso risultato si giunge rilevando che il processo di dissipazione sulla resistenza causa una diminuzione dell'energia immagazzinata nel condensatore

$$E_j = U(0) - U(\Delta t) = \frac{q_o^2 - q^2(\Delta t)}{2C} = \frac{q_o^2}{2C} [1 - \exp(-2\Delta t/RC)]$$

Invertendo l'espressione si ottiene il valore della **carica iniziale**

$$q_o = \sqrt{\frac{2E_j C}{1 - \exp(-2\Delta t/RC)}} = \mathbf{212.6 \mu C}$$

**3.** I condensatori sono disposti in parallelo. Il condensatore equivalente ha quindi capacità  $C_{eq} = C_1 + C_2 = \mathbf{10 \mu F}$ .

Le due resistenze in parallelo sono equivalenti alla resistenza  $R_{\parallel} = \frac{4R \cdot 4R}{4R + 4R} = 2R = \mathbf{2k\Omega}$ .

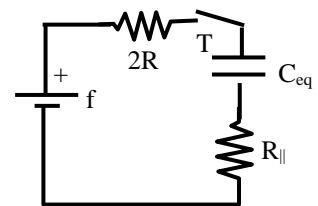
Alla chiusura dell'interruttore la resistenza complessiva di maglia è  $R_{maglia} = R_{\parallel} + 2R = \mathbf{4k\Omega}$ .

La costante di tempo complessiva del processo di carica è  $\tau = R_{maglia} C_{eq} = \mathbf{40ms}$

Il circuito equivalente è quindi costituito da una sola maglia e la tensione ai capi della capacità segue la legge del processo di carica  $V_c(t) = f(1 - \exp(-t/\tau))$

La carica ai capi del condensatore  $C_1$  è quindi

$$Q_1(t) = V_c C_1 = f C_1 (1 - \exp(-t/\tau)). \text{ Per } t^* = 3ms \text{ vale } Q_1(t^*) = \mathbf{5.78 \mu C}$$

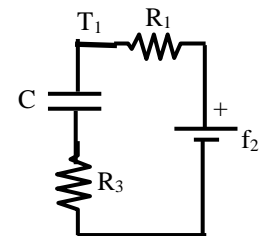


#### 4. Primo processo di scarica

La resistenza di maglia è  $R_{tot1} = R_1 + R_3 = 50 k\Omega$

Il tempo caratteristico di scarica  $\tau_1 = R_{tot1} C = \mathbf{50ms}$

La carica ai capi del condensatore dopo  $\Delta t_1$  è quindi  $q(\Delta t_1) = q_o \exp(-\Delta t_1/\tau_1)$

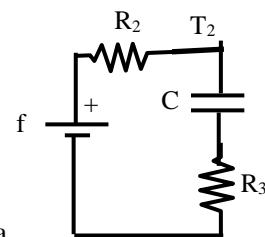


#### Secondo processo di carica

La resistenza di maglia è  $R_{tot2} = R_2 + R_3 = 40 k\Omega$

Il tempo di carica  $\tau_2 = R_{tot2} C = \mathbf{40ms}$

A partire dal nuovo tempo  $t > 0$ , ai capi del condensatore si registra la sovrapposizione del processo di carica operata da  $f$  e quello di scarica della carica pre-esistente  $q(t) = fC[1 - \exp(-t/\tau_2)] + q(\Delta t_1)\exp[-t/\tau_2]$



Imponendo  $q(\Delta t_2) = q_o$  si ottiene  $fC[1 - \exp(-\Delta t_2/\tau_2)] + q_o \exp[-\Delta t_2/\tau_2] \exp[-\Delta t_1/\tau_1]$

$$\text{da cui } \exp(-\Delta t_2/\tau_2) = \frac{fC - q_o}{fC - q_o \exp[-\Delta t_1/\tau_1]} \text{ da cui } \Delta t_2 = \tau_2 \ln\left(\frac{fC - q_o \exp[-\Delta t_1/\tau_1]}{fC - q_o}\right) = \mathbf{3.5 ms}$$