INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO
ANALISI MATEMATICA II
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 18-07-2018

ESERCIZIO 1
Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{y^2 - x^2 + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\, dx - \frac{2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}\, dy.$$

1. Stabilire se ω chiusa.
2. Dire se ω esatta ed in caso affermativo, determinare tutte le sue primitive (suggerimento importante: per ottenere la primitiva si consiglia di calcolare $\int Y dy$).
3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$, dove γ la circonferenza di centro (100,0) e raggio 200.

SOLUZIONE
La forma è chiusa:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{2y(x^2 + y^2 + 1) - 4y(y^2 - x^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} = \frac{6x^2y - 2y^3 - 2y}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$$

e poi

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{-2y(x^2 + y^2 + 1) + 4x \cdot 2xy}{(x^2 + y^2 + 1)^3} = \frac{6x^2y - 2y^3 - 2y}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$$

e quindi $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$. Inoltre è definita in tutto $\mathbb{R}^2$, e quindi è esatta. Calcolo della primitiva:

$$F(x, y) = \int \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dy = \int \frac{-xd(x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dy = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} + \varphi(x),$$

e poi imponendo $\frac{\partial F}{\partial x} = X$ troviamo che deve essere

$$\frac{y^2 - x^2 + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2} + \varphi'(x) = \frac{y^2 - x^2 + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

e quindi $\varphi' = 0$ e possiamo prendere $F(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}$, Per finire, essendo la forma esatta, il suo integrale su una curva chiusa come la circonferenza nel testo vale zero.

OSSERVAZIONE. Se si usa $\int X dx$ per il calcolo della primitiva si trova un integrale più difficile: utilizzando l'integrazione per decomposizione e quella per parti abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{y^2 - x^2 + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx &= \int \frac{y^2 + x^2 + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx - \int x \cdot \frac{d(1 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ &= \int \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} - \int \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} + \varphi(y).\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sia D la regione piana delimitata dalle curve $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando D attorno all'asse x.

SOLUZIONE

Utilizzando il Teorema di Guldino, si trova:

$$\begin{aligned}\text{Volume } =&2\pi \iint_D y dx dy \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} y dx dy \\ &= \pi \int_0^1 \left[y^2\right]_{x^3}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \pi \int_0^1 (x - x^6) dx \\ &= \frac{5}{14}\pi.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\pi} & \text{per} \quad 0 \le x < \frac{\pi}{6} \\ 1 & \text{per} \quad \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{2}{3}\pi \\ 3 - \frac{3}{\pi}x & \text{per} \quad \frac{2}{3}\pi < x \le \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE

La funzione è regolare a tratti e inoltre $f(0) = 0 = f(\pi)$. Quindi la serie converge totalmente. Si ha poi:

$$\begin{aligned} b_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/6} \frac{6x}{\pi} \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/6}^{2\pi/3} \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{2\pi/3}^{\pi} \left(3 - \frac{3}{\pi}x\right) \sin kx dx \\ =& \frac{6}{\pi^2} \left[-x \frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi/6} + \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_{\pi/2}^{2\pi/3} + \frac{8}{\pi^2} \left[-\pi \frac{\cos kx}{k} + x \frac{\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2}\right]_{2\pi/3}^{\pi} \\ =& \frac{12}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{6} + \frac{6}{k^2\pi^2} \sin \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2\pi^2} \left[2 \sin \frac{k\pi}{6} + \sin \frac{2k\pi}{3}\right] \sin kx = f(x)$$

con convergenza totale.

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - x u_x = 2 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = x^2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.

SOLUZIONE
Le caratteristiche si trovano risolvendo il problema

$$\begin{cases} x' = -x \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

e quindi $\varphi(x_0, t) = x_0 e^{-t}$, $\psi(x, y) = xe^t$. Sulle caratteristiche l'equazione diventa:

$$\begin{cases} U' = 2 \\ U(x_0, 0) = x_0^2 \end{cases}$$

la cui soluzione è $U(x_0, t) = 2t + x_0^2$. Infine, $u(x, t) = 2t + x^2 e^{2t}$.

Verifica:

$$u(x, 0) = x^2, \qquad u_t - xu_x = (2 + 2x^2 e^{2t}) - x(2xe^{2t}) = 2.$$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = e^{2x} \sin^2 x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.
SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta.

$$\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} e^{2x+4s\sqrt{t}} \sin^2(x + 2s\sqrt{t}) ds \\
=& \frac{e^{2x+4t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-2\sqrt{t})^2} \frac{1 - \cos(2x + 4s\sqrt{t})}{2} ds \\
=& \frac{e^{2x+4t}}{2} - \frac{e^{2x+4t}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-2\sqrt{t})^2} \cos[2(x + 4t) + 4(s - 2\sqrt{t})\sqrt{t}] ds \\
=& \frac{e^{2x+4t}}{2} - \cos(2x + 8t) \frac{e^{2x+4t}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-2\sqrt{t})^2} \cos[4(s - 2\sqrt{t})\sqrt{t}] ds \\
(r = s - 2\sqrt{t}) \qquad =& e^{2x+4t} - \cos(2x + 8t) \frac{e^{2x+4t}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} \cos(4r\sqrt{t}) dr \\
=& \frac{e^{2x+4t}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} \cos(2x + 8t).
\end{aligned}$$

Verifica:

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} \cos 2x = e^{2x} \sin^2 x$$

e poi

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} = & \left[2e^{2x+4t} + 4e^{2x} \sin(2x + 8t)\right] \\
& - \left[2e^{2x+4t} - 2e^{2x} \cos(2x + 8t) + 4e^{2x} \sin(2x + 4t) + 2e^{2x} \cos(2x + 8t)\right] = 0.
\end{aligned}$$