FISICA

A.A. 2022-2023
Ingegneria Gestionale
1° prova del 28 Febbraio 2022

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Venerdì 3 Marzo e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

1. Un punto materiale descrive un moto tridimensionale rappresentato dalla seguente equazione
$\vec{r_1}(t) = (\alpha t)\hat{\imath} + (4\beta - 2\gamma t^2)\hat{\jmath} + (7\delta t)\hat{\boldsymbol{k}}$

a) Determinare le dimensioni di α, β, γ e δ nelle unità di misura del SI.
b) Si supponga che il moto sia bidimensionale (δ=0) e che le altre costanti abbiano valore numerico pari a 1. Calcolare e graficare la traiettoria del punto materiale specificandone il verso di percorrenza.
c) Determinare la velocità e l'accelerazione del punto materiale in forma vettoriale.

Si confronti questo moto $\vec{r_1}(t)$ con un secondo punto materiale che si muove nel seguente modo:
$\vec{r_2}(t) = A\cos(4\omega t)\hat{\imath} + B\sin(4\omega t)\hat{\jmath}$

d) Trovare le dimensioni di A, B e ω.
e) Si consideri che A e B abbiano stesso valore numerico pari a $\frac{1}{3}$. Determinare quale dei due punti materiali sarà più veloce a $t = \frac{\pi}{2\omega}$ con ω di valore numerico uguale a 2.

2. Un punto materiale compie un moto unidimensionale descritto dalla seguente legge oraria:
$x(t) = 5\ m/s^4 \cdot\ t^4 - 7\frac{m}{s^2}\cdot\ t^2 + 2\ m$

a) Determinare le leggi orarie della velocità e dell'accelerazione.
b) Determinare in quali istanti il punto materiale si ritrova nell'origine.
c) Determinare in quali istanti c'è un'inversione del moto.
d) Determinare in quali istanti l'accelerazione si annulla.

3. Il comandante di una pilotina, partendo da un punto A, deve raggiungere con la barca un punto B, facendo attenzione agli scogli lungo il tragitto. La barca procede per 20 minuti in direzione Nord (coincidente con l'asse y positivo del piano cartesiano) alla velocità di 10 km/h, successivamente vira verso Nord-Est (si considera una svolta di 45°) continuando in questa direzione per 30 minuti a 7 km/h. In seguito, prosegue verso Sud-Est per 12 minuti a 15 km/h, poi procede verso Est per 2 minuti a 15 km/h ed infine effettua una svolta di 60° più a Sud per 5 minuti a 17 km/h, raggiungendo il punto B. Si supponga che A coincida con l'origine delle coordinate del piano e che tutti i cambi di rotta siano istantanei.

a) Quanti chilometri ha percorso la pilotina?
b) Si identifichi il vettore spostamento totale fornendo il modulo e l'angolo rispetto al Nord.
c) Calcolare la velocità media del viaggio.
d) Se non ci fossero stati gli scogli, la barca avrebbe potuto percorrere il tragitto diretto da A a B. Si calcoli il tempo che avrebbe impiegato la pilotina a raggiungere B se fosse andata ad una velocità pari alla $\frac{S_{percorso}}{\Delta T_{tot}}$.

4. Un matematico decide di studiare i movimenti di una talpa che, scavando, solleva la terra nel suo giardino. Supponendo che il moto avvenga nel piano xy e sia descritto dai moti componenti:

$$\begin{cases} x(t) = 5m/s^2 \cdot \frac{t^2}{5} \\ y(t) = 2m/s^3 \cdot \frac{t^3}{6} - 3m/s \cdot \frac{t}{3} \end{cases}$$

a) Trovare la traiettoria che il matematico si aspetta di vedere nel giardino fornendo la posizione esatta quando x=0, 1, 3, 4, 9.
b) Calcolare lo spazio scavato dalla talpa in 1 minuto (Si consiglia di mantenere le unità di misura esplicitate per questa sezione).
c) Descrivere le caratteristiche del moto sui singoli assi determinando anche velocità e accelerazione.

FISICA

A.A. 2022-2023
Ingegneria Gestionale
Soluzioni 1°prova
a cura di G. Ambrosi

SOLUZIONE PROBLEMA 1

a) $\overrightarrow{r(t)}$ esprime la posizione ad un dato tempo t (misurato in secondi) e deve quindi essere espressa in metri:

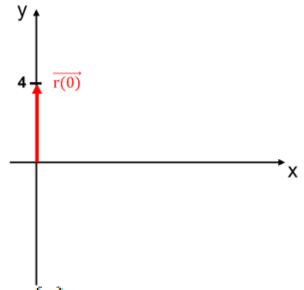
- $[\boldsymbol{\alpha t}] = [L] \rightarrow [\boldsymbol{t}] = [T] \rightarrow [\boldsymbol{\alpha}] = [L][T]^{-1}$
- $[\boldsymbol{\beta}] = [L]$
- $[\boldsymbol{\gamma t^2}] = [L] \rightarrow [\boldsymbol{t^2}] = [T]^2 \rightarrow [\boldsymbol{\gamma}] = [L][T]^{-2}$
- $[\boldsymbol{\delta t}] = [L] \rightarrow [\boldsymbol{t}] = [T] \rightarrow [\boldsymbol{\delta}] = [L][T]^{-1}$

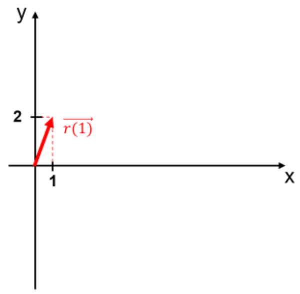
b) Il moto diventa quindi $\vec{r}_1(t) = t\hat{\imath} + (4 - 2t^2)\hat{\jmath} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 4 - 2t^2 \end{cases}$

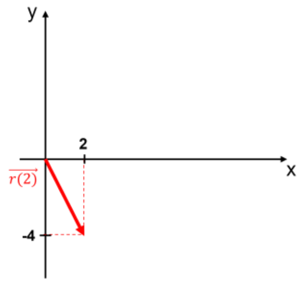
Per trovare la traiettoria, è sufficiente svolgere tutto in funzione del tempo:

$$\begin{cases} t = x \\ y(x) = 4 - 2x^2 \end{cases}$$

È chiaro che si avrà una traiettoria parabolica.
Per capire il verso di percorrenza, conviene studiare le evoluzioni temporali di $x(t)$ e $y(t)$, con $t \in [0, +\infty)$





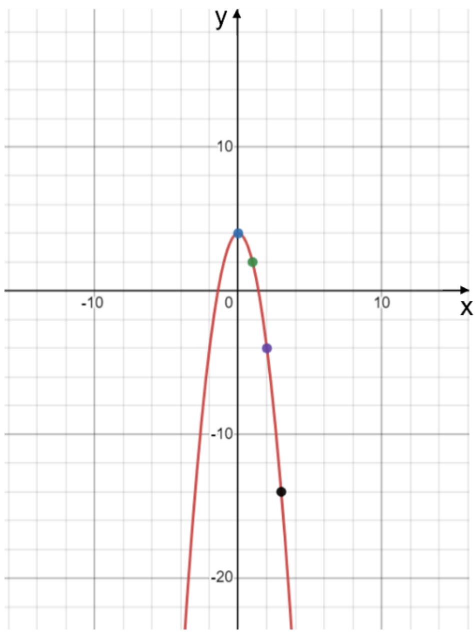


$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x(2) = 2 \\ y(2) = -4 \end{cases}$

La coordinata x cresce, quella y diminuisce per cui il punto materiale si muoverà verso $y \rightarrow -\infty$.
Si grafica utilizzando i valori di prova:

x	Y
0	4
1	2
2	-4
3	-14



c) $\overrightarrow{v_1} = \frac{d\overrightarrow{r_1}}{dt} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = -2t \end{cases}$ quindi $\overrightarrow{v_1} = 1\hat{\imath} - 2t\hat{\jmath}$

$\overrightarrow{a_1} = \frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt} \rightarrow \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -2 \end{cases}$ quindi $\overrightarrow{a_1} = -2\hat{\jmath}$

d) Si ripete il ragionamento di prima:

- $[\boldsymbol{A}] = [\boldsymbol{B}] = [L]$
- $[\boldsymbol{\omega t}] = adimensionale \rightarrow [\boldsymbol{\omega}] = [T]^{-1}$

Adesso si calcolano le due velocità.
La velocità del secondo punto materiale è: $\overrightarrow{v_2} = \frac{dx_1}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy_1}{dt}\hat{\jmath} = \left(-\frac{4}{3}\omega\sin(4\omega t)\hat{\imath} + \frac{4}{3}\omega\cos(4\omega t)\,\hat{\jmath}\right) \cdot m$

$\vec{v_2}\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) = \frac{4}{3}\omega \cdot m \cdot \hat{j} \cdot = 2.7\frac{m}{s}\hat{j}$, la velocità in questo istante è tutta su y quindi $|v_2| = 2.7\ m/s$.

La velocità del primo punto materiale è:

$\vec{v_1}\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) = 1\frac{m}{s}\hat{\imath} - \frac{4\pi}{\omega}\hat{\jmath}$, quindi $|v_1| = \sqrt{1\frac{m^2}{s^2} + \frac{16\pi^2}{\omega^2}} = 6.4\frac{m}{s} > |v_2|$

SOLUZIONE PROBLEMA 2

a) La relazione tra $x(t), v(t)$ e $a(t)$ è la seguente:

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{dx}{dt} = 20\frac{m}{s^4} \cdot t^3 - 14\ m/s^2 \cdot t$$
$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d^2x}{dt^2} = 60\frac{m}{s^4} \cdot t^2 - 14\ m/s^2$$

b) Si omettono per comodità le unità di misura.

$x(t) = 0 = 5t^4 - 7t^2 + 2$ si pone $t^2 = s$ quindi $5s^2 - 7s + 2 = 0$.
Risolvendo si ottengono $s_1 = 1, s_2 = \frac{2}{5}$, entrambi accettabili perché positivi. I tempi in cui si annulla sono 4 ($t_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$ e $t_{3,4} = \pm 1$) ma dato che $t \in [0, \infty)$ le soluzioni negative non sono fisicamente accettabili.

$$\boldsymbol{t_1^x = \sqrt{\frac{2}{5}}, t_2^x = 1}$$

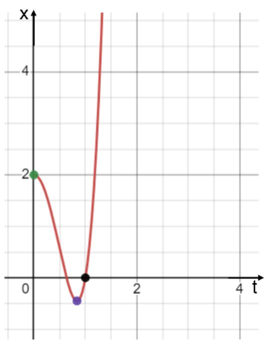
c) L'inversione del moto si ha quando la velocità si annulla.

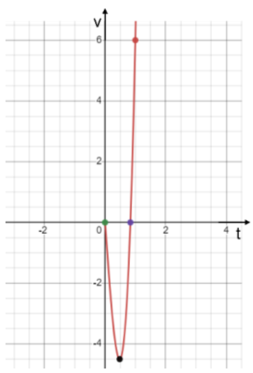
$v(t) = 0 = 20t^3 - 14t = t \cdot (20t^2 - 14)$ e le soluzioni accettabili sono $\boldsymbol{t_1^v = 0, t_2^v = \sqrt{\frac{7}{10}}}$

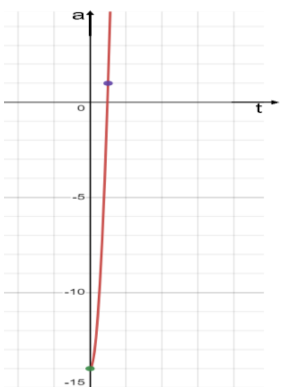
d) $a(t) = 0 = 60t^2 - 14$ perciò $\boldsymbol{t_1^a = \sqrt{\frac{7}{30}}}$.

e) Dalla derivata di $x(t)$, si sono già trovati i punti stazionari. Si può studiare il segno della derivata e si ha $x(t_2^v)$ è un punto di minimo per la posizione.

Si parte a 2 metri dall'origine, si torna indietro, si ripassa dal punto di partenza per poi allontanarsi.





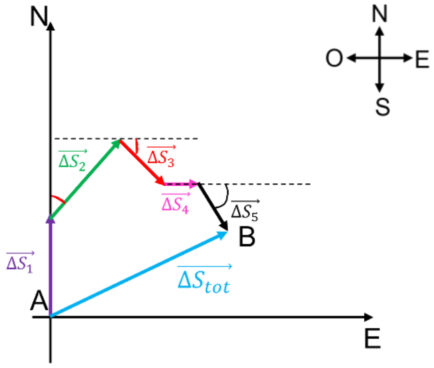


Dallo studio della derivata dell'accelerazione, si ha che per
$t = \sqrt{\frac{7}{30}}$, si trova un punto di minimo per v.
Si parte da fermi, successivamente la velocità diventa minore di 0. Dopo aver raggiunto il suo minimo, la velocità aumenta e si verifica una inversione di moto.
L'accelerazione è descritta da una parabola a $t \geq 0$.

L'accelerazione iniziale è negativa (torna indietro). La decelerazione diminuisce via via fino ad annullarsi in $t = \sqrt{\frac{7}{30}}$ per poi diventare positiva.

SOLUZIONE PROBLEMA 3

Si grafica il viaggio.



$\Delta t_i\ [min]$	$v_i\ [km/h]$
20	10
30	7
12	15
2	15
5	17

a) Lo spazio percorso sarà la somma dei singoli spostamenti ($|\overrightarrow{\Delta S_i}| = |\vec{v}_i| \cdot \Delta t_i$ con l'accortezza di trasformare i tempi espressi in minuti in ore)

$$S_{percorso} = |\overrightarrow{\Delta S_1}| + |\overrightarrow{\Delta S_2}| + |\overrightarrow{\Delta S_3}| + |\overrightarrow{\Delta S_4}| + |\overrightarrow{\Delta S_5}| = \mathbf{11.8\ km}$$

b) Il vettore spostamento totale $\overrightarrow{\Delta S_{tot}}$ è la somma vettoriale dei singoli vettori spostamento:

$$\overrightarrow{\Delta S_{tot}} = \overrightarrow{\Delta S_1} + \overrightarrow{\Delta S_2} + \overrightarrow{\Delta S_3} + \overrightarrow{\Delta S_4} + \overrightarrow{\Delta S_5}$$

Si separano le componenti lungo i singoli assi:

$$\begin{cases} \Delta S_{tot_x} = 0 + \Delta S_2 \sin\frac{\pi}{4} + \Delta S_3 \cos\frac{\pi}{4} + \Delta S_4 + \Delta S_5 \cos\frac{\pi}{3} = 5.8\ km \\ \Delta S_{tot_y} = \Delta S_1 + \Delta S_2 \cos\frac{\pi}{4} - \Delta S_3 \sin\frac{\pi}{4} + 0 - \Delta S_5 \sin\frac{\pi}{3} = 2.5\ km \end{cases}$$

Quindi il vettore cercato sarà $|\overrightarrow{\Delta S_{tot}}| = \sqrt{\Delta S_{tot_x}^{\ 2} + \Delta S_{tot_y}^{\ 2}} = \mathbf{6.3\ km}$.

Per identificare la direzione del vettore, basta trovare l'angolo tra il Nord e il vettore $\overrightarrow{\Delta S_{tot}}$:

$$\begin{cases} \Delta S_{tot_x} = |\overrightarrow{\Delta S_{tot}}| sin\alpha \\ \Delta S_{tot_y} = |\overrightarrow{\Delta S_{tot}}| cos\alpha \end{cases} \rightarrow \frac{\Delta S_{tot_x}}{\Delta S_{tot_y}} = tg\alpha \rightarrow \alpha = arctg\,\frac{\Delta S_{tot_x}}{\Delta S_{tot_y}} = \mathbf{66.7°}$$

Il verso è positivo nella direzione appena identificata.

c) La velocità media $\overrightarrow{v_m}$ è definita come: $\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{r(t+\Delta T)} - \overrightarrow{r(t)}}{\Delta T}$, in cui $\Delta T_{tot} = \Sigma_{i=1}^{5} \Delta t_i = 1.15h = 1h\ 9\ min$

In questo caso $\overrightarrow{r(t)} = \overrightarrow{r(0)} = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta S_{tot}}}{\Delta T_{tot}} = \frac{\Delta S_{tot_x}}{\Delta T_{tot}} \hat{\imath} + \frac{\Delta S_{tot_y}}{\Delta T_{tot}} \hat{\jmath} = 5.0\ km/h\, \hat{\imath} + 2.2\ km/h\, \hat{\jmath}$$

Il modulo sarà: $\frac{|\overrightarrow{\Delta S_{tot}}|}{\Delta T_{tot}} = |\overrightarrow{v_m}| = \mathbf{5.5\ km/h}$

d) Si ha che $|v^*| = \frac{S_{percorso}}{\Delta T_{tot}} = 10.3 \frac{km}{h}$. Si noti che questa risulta essere la media pesata delle velocità perché

$$|v^*| = \frac{S_{percorso}}{\Delta T_{tot}} = \frac{\sum_{i=1}^{5} |v_i| \cdot \Delta t_i}{\sum_{i=1}^{5} \Delta t_i}$$

Andare da A a B direttamente significa percorrere la lunghezza indicata dal modulo di $\overrightarrow{\Delta S_{tot}}$, il tempo impiegato quindi sarà: $t^* = \frac{|\overrightarrow{\Delta S_{tot}}|}{|v^*|} \approx \mathbf{37\ min}$.

SOLUZIONE PROBLEMA 4

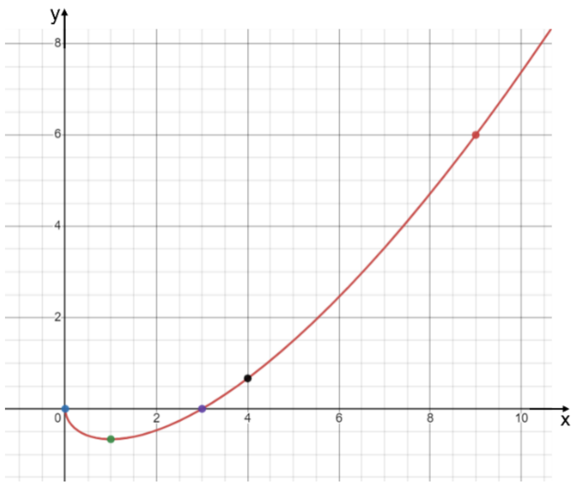
a) Trovare la traiettoria significa studiare la coordinata verticale in funzione di quella orizzontale $y(x)$.

$$\begin{cases} x(t) = 5m/s^2 \cdot \frac{t^2}{5} \\ y(t) = 2m/s^3 \cdot \frac{t^3}{6} - 3m/s \cdot \frac{t}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} t = \sqrt{x \cdot \frac{s^2}{m}} \\ y(t) = t\left(\frac{t^2}{3} \cdot \frac{m}{s^3} - 1 \cdot \frac{m}{s}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{x \cdot \frac{s^2}{m}} \\ y(x) = \sqrt{x \cdot \frac{s^2}{m}}\left(\frac{x}{3} \cdot s^{-1} - 1 \cdot \frac{m}{s}\right) \end{cases}$$

Si è ottenuta l'equazione della traiettoria della talpa. Per semplificare questi passaggi, si potevano svolgere i calcoli considerando che i fattori costanti davanti a t nelle leggi orarie pareggiano le unità di misura a dx e sx dell'uguale. In ogni caso, è sempre bene fare un controllo dimensionale per verificare che i membri delle equazioni siano espressi nella stessa unità di misura.

Il grafico rappresenta ciò che il matematico vedrà nel giardino.



b) Lo spazio percorso sarà la somma vettoriale di ciò che avviene sui singoli assi:

$$S = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad \text{in cui}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2t \cdot m/s^2 \\ \frac{dy}{dt} = \left(t^2 \cdot m/s^3 - 1 \cdot m/s\right) \end{cases}$$

Sostituendo quanto trovato nella formula, si integra da 0 a $t^* = 60\, s$:

$$S = \int_0^{t^*} \sqrt{t^4 \cdot \frac{m^2}{s^6} + 2t^2 \cdot \frac{m^2}{s^4} + 1 \cdot \frac{m^2}{s^2}}\, dt = \int_0^{t^*} \sqrt{\left(t^2 \cdot \frac{m}{s^3} + 1 \cdot \frac{m}{s}\right)^2}\, dt = \int_0^{t^*} \left(t^2 \cdot \frac{m}{s^3} + 1 \cdot \frac{m}{s}\right) dt$$

$S = \frac{t^3}{3} \cdot \frac{m}{s^3} + t \cdot \frac{m}{s} = \mathbf{72060\ m}$. È un valore assurdo! Il matematico ha probabilmente sbagliato a parametrizzare il moto.

c) Le velocità sono già state trovate:

$\frac{dx}{dt} = 2t \cdot m/s^2$ $\rightarrow$ La velocità su x cresce linearmente, è un moto uniformemente accelerato.

$\frac{dy}{dt} = \left(t^2 \cdot m/s^3 - 1 \cdot m/s\right) \rightarrow$ La velocità iniziale su y non è nulla e minore di zero, successivamente cresce in modo parabolico.

$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\ m/s^2$ $\rightarrow$ L'accelerazione su x è costante nel tempo.

$\frac{d^2y}{dt^2} = 2t \cdot m/s^3$ $\rightarrow$ L'accelerazione su y