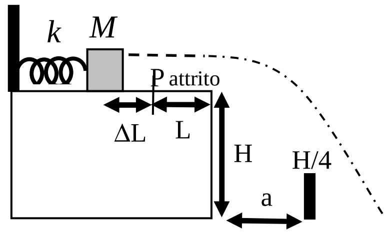
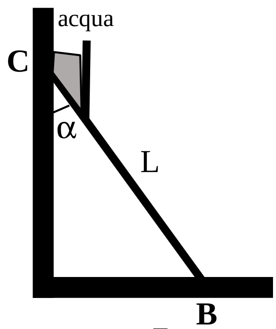
FISICA

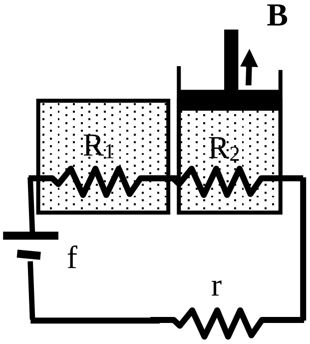
A.A. 2014-2015
Ingegneria Gestionale
Testo - Esame completo
1° appello del 23 Giugno 2015



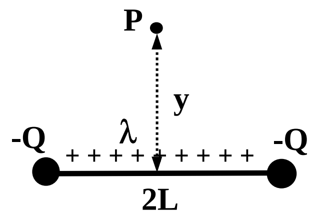
1. Una molla di massa trascurabile e di costante elastica k=20 N/m è posizionata tra una parete fissa ed una massa M=4 kg libera di muoversi lungo un tavolo orizzontale alto H=1.5 m rispetto al pavimento. La molla viene compressa di una quantità ΔL e quando viene liberata riesce a lanciare la massa M lungo il tavolo. Quando la molla raggiunge la sua lunghezza a riposo, nel punto P, la massa M si distacca ed affronta un tratto di lunghezza L=1 m in cui il piano diviene scabro (μ_d=0.2). Successivamente la massa cade dal tavolo in modo da sorpassare una barriera di altezza H/4 posizionata ad una distanza a=50 cm dalla base del tavolo. Determinare il valore minimo della compressione ΔL della molla per poter superare tale barriera.



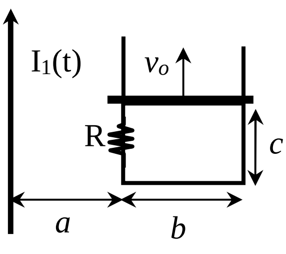
2. Una scala di massa m_1=20 kg e di lunghezza L=4m è appoggiata ad una parete verticale in un punto C, inclinata di un angolo α=30° rispetto alla verticale. La scala poggia anche nel punto B sul pavimento scabro ossia in grado di sviluppare anche una forza di attrito (μ_s=0.3) che garantisce la statica della scala. Sulla sommità della scala (nel punto C) è posizionato un contenitore, inizialmente vuoto e privo di massa, che raccoglie l'acqua piovana. Durante una intensa pioggia il contenitore accresce la sua massa di 5kg/h. Determinare dopo quanto tempo dall'inizio della pioggia la scala scivola perdendo la stabilità. [Trascurare le dimensioni del contenitore]



3. Il circuito resistivo in figura viene alimentato da una forza elettromotrice f=5kV. Le resistenze hanno differenti funzioni. Il resistore R_1=5.5 kΩ viene utilizzato come scaldatore per aumentare la temperatura di un bollitore contenente M=2kg di acqua distillata. Il resistore R_2=4 kΩ viene invece sfruttato per scaldare 0.5 kmoli di un gas monoatomico contenuto in un cilindro che si espande a pressione costante (atmosferica) producendo lavoro meccanico. Infine la resistenza interna del circuito r=500 Ω tiene in conto di tutti gli effetti resistivi indesiderati interni al generatore. Sapendo che tutto il sistema si trova inizialmente a 20°C, determinare dopo un tempo t=20s dall'attivazione del circuito, a quali temperature si portano rispettivamente la massa d'acqua ed il gas nel cilindro. Determinare anche il lavoro meccanico ottenuto nel cilindro.[calore specifico acqua C=4187 J K^{-1} kg^{-1}, $c_v=3R_{gas}/2$ ove R_{gas}=8314 J K^{-1} $kmol^{-1}$ si trascurino le perdite termiche nei bollitori]



4. Su un segmento rettilineo di lunghezza 2L (ove L=5cm) viene posizionata una distribuzione lineare uniforme di carica elettrica di valore λ=20μC/m. Alle estremità di tale segmento sono invece posizionate due cariche puntiformi negative di medesima carica –Q (ove Q=5 μC). Determinare se, sulla mediana del segmento, esistono punti P di equilibrio in cui il campo elettrico si annulli, eventualmente fornendone la distanza y dal segmento.

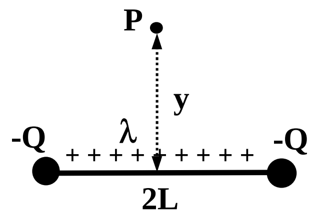


5. Un filo infinitamente lungo è percorso dalla corrente $I_1(t)=I_o\sin(2\pi ft)$.Una spira rettangolare di lati *b,c* giace con il filo nel piano del foglio ad una distanza minima *a* dal filo. La spira è inoltre costituita da 3 lati fissi ed un lato mobile inizialmente dotato della velocità v_o=10m/s. Assumendo R=0.2 Ω la resistenza elettrica della spira, determinare l'espressione della forza elettromotrice indotta e della corrente indotta e calcolarla al tempo t=0. **Facoltativo:** si determini la forza agente sul lato mobile della spira al tempo t=0. [**Dati:**f=2kHz, I_o=20A, a=1m, b=2m, c=4m]

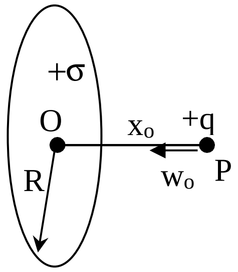
FISICA

A.A. 2014-2015
Ingegneria Gestionale
Testo - SECONDO ESONERO
1° appello del 23 Giugno 2015

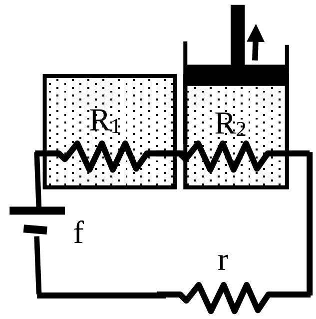
1. Su un segmento rettilineo di lunghezza 2L (ove L=5cm) viene posizionata una distribuzione lineare uniforme di carica elettrica di valore λ=20μC/m. Alle estremità di tale segmento sono invece posizionate due cariche puntiformi negative di medesima carica –Q (ove Q=5 μC). Determinare se, sulla mediana del segmento, esistono punti P di equilibrio in cui il campo elettrico si annulli, eventualmente fornendone la distanza y dal segmento.



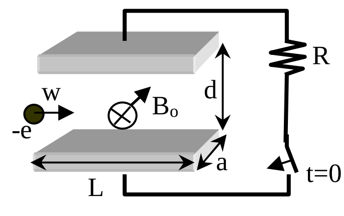
2. Un disco di materiale isolante di raggio R=20cm risulta carico con densità superficiale uniforme +σ. Sull'asse del disco in un punto *P* distante x_o=40cm dal centro O, è posta una sferetta di carica +q e di massa m lanciata verso O con una velocità iniziale w_o=5m/s. Calcolare il punto di minima distanza B da O cui giunge tale sferetta. **Facoltativo:** calcolare quale doveva essere la velocità iniziale affinché la sferetta oltrepassi il disco per poi venire accelerata dal lato opposto. Fornire in questo caso anche la velocità limite raggiunta [**Dati:** σ = 50μC/m^2, q=2μC, m= 50g]



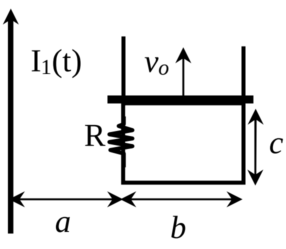
3. Il circuito resistivo in figura viene alimentato da una forza elettromotrice f=5kV. Le resistenze hanno differenti funzioni. Il resistore R_1=5.5 kΩ viene utilizzato come scaldatore per aumentare la temperatura di un bollitore contenente M=2kg di acqua distillata. Il resistore R_2=4 kΩ viene invece sfruttato per scaldare 0.5 kmoli di un gas monoatomico contenuto in un cilindro che si espande a pressione costante (atmosferica) producendo lavoro meccanico. Infine la resistenza interna del circuito r=500 Ω tiene in conto di tutti gli effetti resistivi indesiderati interni al generatore. Sapendo che tutto il sistema si trova inizialmente a 20°C, determinare dopo un tempo t=20s dall'attivazione del circuito, a quali temperature si portano rispettivamente la massa d'acqua ed il gas nel cilindro. Determinare anche il lavoro meccanico ottenuto nel cilindro.[calore specifico acqua C=4187 J K^{-1} kg^{-1}, $c_V=3R_{gas}/2$ ove R_{gas}=8314 J K^{-1} kmol^{-1} si trascurino le perdite termiche nei bollitori]



4. Un condensatore piano è costituito da due armature rettangolari identiche di spigoli *a*,*L*, poste alla distanza *d*. Il processo di scarica avviene per t>0 dopo la chiusura dell'interruttore del circuito RC descritto in figura. Fra le armature del condensatore viene anche applicato un vettore induzione magnetica uniforme B_o. Dovendo lanciare un elettrone alla velocità *w* fra le armature del condensatore nella direzione parallela al lato L, è necessario attendere un tempo ΔT prima del lancio in modo da mantenere la traiettoria rettilinea. Determinare il tempo di attesa ΔT [Dati: B_o=0.1 T, w=10^3 m/s, R=10MΩ, d=1mm, L=1m, a=1m, Q=15nC]



5. Un filo infinitamente lungo è percorso dalla corrente $I_1(t)=I_o\sin(2\pi ft)$.Una spira rettangolare di lati *b*,*c* giace con il filo nel piano del foglio ad una distanza minima *a* dal filo. La spira è inoltre costituita da 3 lati fissi ed un lato mobile inizialmente dotato della velocità v_o=10m/s. Assumendo R=0.2 Ω la resistenza elettrica della spira, determinare l'espressione della forza elettromotrice indotta e della corrente indotta e calcolarla al tempo t=0. **Facoltativo:** si determini la forza agente sul lato mobile della spira al tempo t=0. [**Dati:**f=2kHz, I_o=20A, a=1m, b=2m, c=4m]



FISICA

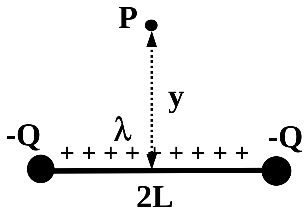
A.A. 2014-2015

Ingegneria Gestionale

SECONDO ESONERO

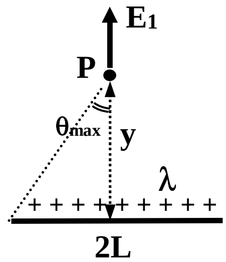
Soluzioni del 1° appello

2. Su un segmento rettilineo di lunghezza 2L (ove L=5cm) viene posizionata una distribuzione lineare uniforme di carica elettrica di valore λ=20μC/m. Alle estremità di tale segmento sono invece posizionate due cariche puntiformi negative di medesima carica –Q (ove Q=5 μC). Determinare se, sulla mediana del segmento, esistono punti P di equilibrio in cui il campo elettrico si annulli, eventualmente fornendone la distanza y dal segmento.



1. Campo elettrico generato da un tratto rettilineo lungo la mediana

Sfruttando le simmetrie si può dimostrare che il campo elettrico lungo la mediana

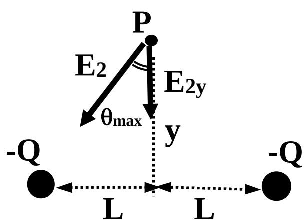


$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o y}\sin\theta_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o y}\frac{L}{\sqrt{y^2+L^2}}$$

Campo elettrico generato dalle cariche puntiformi

Il campo elettrico generato nel punto P da una singola carica negativa è $E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o\left(y^2+L^2\right)}$

tuttavia a causa della presenza di una carica simmetrica il campo elettrico efficace della carica –Q si ottiene prendendo la componente lungo l'asse y



$$E_{2y} = E_2\cos\theta_{\max} = E_2\frac{y}{\sqrt{y^2+L^2}} = \frac{Q\cdot y}{4\pi\varepsilon_o\left(y^2+L^2\right)^{3/2}}$$

Il campo totale dovuto ad entrambe le cariche viene raddoppiato per la presenza della carica simmetrica

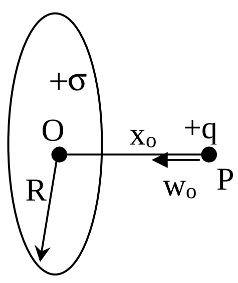
$$E_{punti} = 2E_{2y} = \frac{Q\cdot y}{2\pi\varepsilon_o\left(y^2+L^2\right)^{3/2}}$$

L'equilibrio si ha quando il campo generato dal segmento ha stesso modulo del campo generato dalle cariche, ma verso opposto

$$E_1 = E_{punti} \quad \text{ossia} \quad \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o y}\frac{L}{\sqrt{y^2+L^2}} = \frac{Q\cdot y}{2\pi\varepsilon_o\left(y^2+L^2\right)^{3/2}}$$

da cui $\lambda\cdot L\cdot\left(y^2+L^2\right) = Q\cdot y^2$ e quindi $y = \pm L\sqrt{\dfrac{\lambda L}{Q-\lambda L}} = \pm\dfrac{L}{2} = \pm$ **2.5 cm**

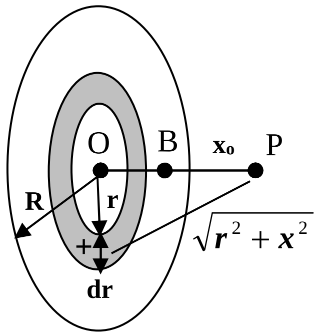
2. Un disco di materiale isolante di raggio R=20cm risulta carico con densità superficiale uniforme +σ. Sull'asse del disco in un punto *P* distante x_o=40cm dal centro O, è posta una sferetta di carica +q e di massa m lanciata verso O con una velocità iniziale w_o=5m/s. Calcolare il punto di minima distanza B da



O cui giunge tale sferetta. **Facoltativo:** calcolare quale doveva essere la velocità iniziale affinché la sferetta oltrepassi il disco per poi venire accelerata dal lato opposto. Fornire in questo caso anche la velocità limite raggiunta [**Dati:** σ = 50μC/m^2, q=2μC, m= 50g]

2. Il potenziale generato da un disco uniformemente carico si calcola sommando nel generico punto **P** tutti i contributi **dV** di anelli concentrici sottili di spessore **dr** sui quali si trova una carica infinitesima $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$.

Il contributo elementare vale $dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{r^2+x_o^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+x_o^2}}$,



da cui integrando si ricava il **potenziale elettrostatico** nel punto P

$$V(P) = \int dV = \int_0^R \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+x_o^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left|\sqrt{r^2+x_o^2}\right|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{R^2+x_o^2}-x_o\right).$$

Analogamente il **potenziale nel punto B** sarà quindi $V(B) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{R^2+x_B^2}-x_B\right)$

Dalla **conservazione dell'energia** si ottiene $\frac{1}{2}mw_o^2 + qV(P) = qV(B)$

Dopo qualche passaggio si ottiene $\sqrt{R^2+x_B^2}-x_B = \left(\sqrt{R^2+x_o^2}-x_o+\frac{mw_o^2\varepsilon_o}{q\sigma}\right) = a =$ **15.8 cm**

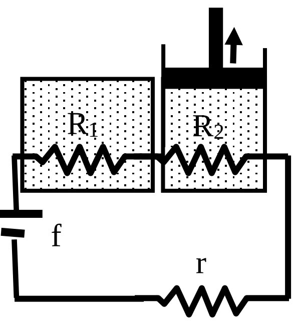
$\sqrt{R^2+x_B^2} = x_B + a$ da cui la **distanza OB** vale quindi $x_B = \frac{R^2-a^2}{2a} =$ **4.8 cm**

Facoltativo: per raggiungere il centro O la velocità minima in B doveva essere

$\frac{1}{2}mw_{\min}^2 + qV(P) = qV(O)$ da cui $w_{\min} = \sqrt{\frac{2q[V(O)-V(P)]}{m}} = \sqrt{\frac{q\sigma}{m\varepsilon_o}\left(R+x_B-\sqrt{R^2+x_B^2}\right)} =$ **5.88 m/s**

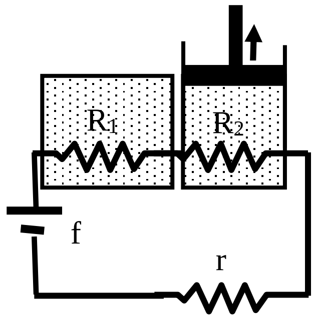
All'infinito, dove V(∞)=0, viene raggiunta la velocità limite che si ottiene imponendo la conservazione dell'energia $qV(O) = \frac{1}{2}mw_{\lim}^2$ da cui $w_{\lim} = \sqrt{\frac{2qV(O)}{m}} = \sqrt{\frac{q\sigma R}{m\varepsilon_o}} =$ **6.73 m/s**

3. Il circuito resistivo in figura viene alimentato da una forza elettromotrice f=5kV. Le resistenze hanno differenti funzioni. Il resistore R_1=5.5 kΩ viene utilizzato come scaldatore per aumentare la temperatura di un bollitore contenente M=2kg di acqua distillata. Il resistore R_2=4 kΩ viene invece sfruttato per scaldare 0.5 kmoli di un gas monoatomico contenuto in un cilindro che si espande a pressione costante (atmosferica) producendo lavoro meccanico. Infine la resistenza interna del circuito r=500 Ω tiene in conto di tutti gli effetti resistivi indesiderati interni al generatore. Sapendo che tutto il sistema si trova inizialmente a 20°C, determinare dopo un tempo t=20s dall'attivazione del circuito, a quali temperature si portano rispettivamente la massa d'acqua ed il gas nel cilindro. Determinare anche il lavoro meccanico ottenuto nel cilindro. [calore specifico acqua C=4187 J K^{-1} kg^{-1}, $c_V=3R_{gas}/2$ ove R_{gas}=8314 J K^{-1} kmol^{-1} si trascurino le perdite termiche nei bollitori]



3. Il circuito elettrico formato da una sola maglia

la **intensità di corrente elettrica di maglia** vale $I = \frac{f}{r + R_1 + R_2} =$ **0.5 A**



La **potenza dissipata** per effetto Joule sulle resistenze

$$P_1 = I^2 R_1 = \frac{f^2 R_1}{(r + R_1 + R_2)^2} = \mathbf{1.375\ kW;} \quad P_2 = I^2 R_2 = \frac{f^2 R_2}{(r + R_1 + R_2)^2} = \mathbf{1\ kW;}$$

Il **calore sviluppato** in un tempo τ nel bollitore **e nello scladatore gas** è quindi

$$Q_1 = P_1 \cdot t = \frac{f^2 R_1}{(r + R_1 + R_2)^2} t = \mathbf{27.5\ kJ} \quad ; \quad Q_2 = P_2 \cdot t = \frac{f^2 R_2}{(r + R_1 + R_2)^2} t = \mathbf{20\ kJ}$$

Nel bollitore la quantità di calore Q_1 serve a portare la temperatura alla temperatura T_1

$$MC(T_1 - T_{amb}) = Q_1 \text{ da cui } T_1 = T_{amb} + \frac{Q_1}{MC} = \mathbf{23.28\ °C}$$

Nello scaldatore a gas per il **primo principio termodinamica:** $Q_2 = L + \Delta U$

ove la variazione di **energia interna** $\Delta U = nc_v \Delta T$

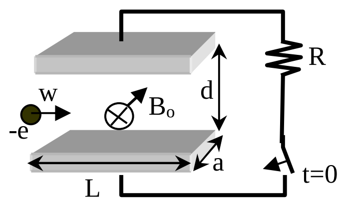
ed il **lavoro** per trasformazione isobare di gas perfetti $L = p\Delta V = nR_{gas}\Delta T$

per cui il primo principio si sintetizza come $Q_2 = n(c_v + R_{gas})\Delta T = nc_p \Delta T \quad \left[c_p = \frac{5R_{gas}}{2} \right]$

da cui **la temperatura dello scaldatore a gas** vale $T_2 = T_{amb} + \frac{Q_2}{nc_P} =$ **21.92 °C**

ed il **lavoro meccanico** $L = nR_{gas}\Delta T = \frac{nR_{gas}}{nc_p} Q_2 = \frac{2}{5} Q_2 =$ **8 kJ**

4. Un condensatore piano è costituito da due armature rettangolari identiche di spigoli *a*,*L*, poste alla distanza *d*. Il processo di scarica avviene per t>0 dopo la chiusura dell'interruttore del circuito RC descritto in figura. Fra le armature del condensatore viene anche applicato un vettore induzione magnetica uniforme B_o. Dovendo lanciare un elettrone alla velocità *w* fra le armature del condensatore nella direzione parallela al lato L, è necessario attendere un tempo ΔT prima del lancio in modo da mantenere la traiettoria rettilinea. Determinare il tempo di attesa ΔT [Dati: B_o=0.1 T, w=10^3 m/s, R=10MΩ, d=1mm, L=1m, a=1m, Q=15nC]

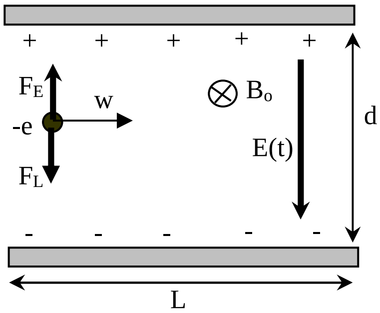


4. L'elettrone attraversa una regione di spazio dove sono simultaneamente non nulli campo elettrico e campo magnetico e subisce una forza complessiva $\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_L = -e\vec{E}(t) - e\vec{w} \times \vec{B}_o$

La forza totale si annulla quando $E(t) = wB_o$

Il campo elettrico all'interno del condensatore varia

Temporalmente con legge di scarica

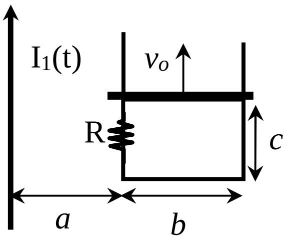


$$E(t) = \frac{\Delta V_c}{d} = \frac{Q}{C \cdot d} \exp(-t / RC)$$

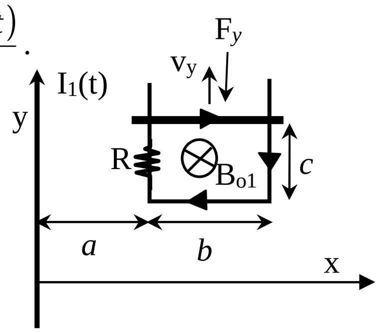
dove $C = \varepsilon_o \dfrac{aL}{d} = \mathbf{8.84\ nF}$, $\tau = RC = \mathbf{88ms}$

Combinando le equazioni si ottiene il tempo di attesa necessario affinchè l'elettrone percorra una traiettoria rettilinea, imponendo $E(t) = wB_o$, da cui $t = RC \cdot \ln\left(\dfrac{Q}{C \cdot d \cdot w \cdot B_o}\right) = \mathbf{0.25\ s}$

5. Un filo infinitamente lungo è percorso dalla corrente $I_1(t)=I_o\sin(2\pi ft)$.Una spira rettangolare di lati *b*,*c* giace con il filo nel piano del foglio ad una distanza minima *a* dal filo. La spira è inoltre costituita da 3 lati fissi ed un lato mobile inizialmente dotato della velocità v_o=10m/s. Assumendo R=0.2 Ω la resistenza elettrica della spira, determinare l'espressione della forza elettromotrice indotta e della corrente indotta e calcolarla al tempo t=0. **Facoltativo:** si determini la forza agente sul lato mobile della spira al tempo t=0. [**Dati:**f=2kHz, I_o=20A, a=1m, b=2m, c=4m]



5. Il filo genera un vettore induzione magnetica di intensità $B_{o1}(x,t) = \dfrac{\mu_o I_1(t)}{2\pi x}$.



Il flusso concatenato in accordo all'orientazione scelta in figura vale

$$\Phi_c = \int \vec{B}_{o1} \cdot \hat{n} dS = \int B_{o1} dS = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi} \int_o^{y(t)} dy \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o I_1(t) y(t)}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

la **forza elettromotrice indotta nella spira**

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{d}{dt}\left(I_1(t) \cdot y(t)\right) = -\frac{\mu_o}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left[y \frac{dI_1}{dt} + v_y I_1\right]$$

$$= -\frac{\mu_o I_o}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left[(2\pi f) y \cos(2\pi ft) + v_y \sin(2\pi ft)\right]$$ e per **t=0** $f_{i0} = -\mu_o I_o fc \ln\left(1 + \dfrac{b}{a}\right) = \mathbf{-0.22V}$

la **corrente indotta** al tempo t=0 $I_{2o} = \dfrac{f_{i0}}{R} = \mathbf{-1.1\ A}$ (la direzione è opposta a quella in figura)

Facoltativo:
la forza agente sul lato mobile è diretta lungo l'asse y in senso opposto

$$F_y = I_2 \int_a^{a+b} B_{o1} dx = I_2 \left(\frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right) = -\left(\frac{\mu_o I_o}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right)^2 \frac{(2\pi fy)\sin(2\pi ft)\cos(2\pi ft) + v_y \sin^2(2\pi ft)}{R}$$

e per **t=0** $F_y = 0$.

FISICA

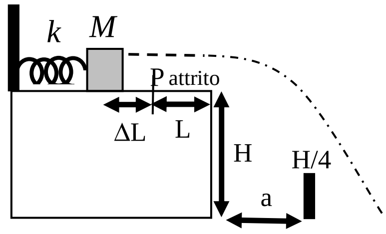
A.A. 2014-2015

Ingegneria Gestionale

ESAME COMPLETO

Soluzioni del 1° appello

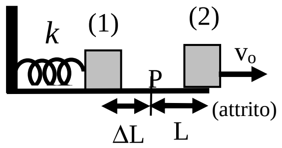
Problemi di Meccanica



1. Una molla di massa trascurabile e di costante elastica k=20 N/m è posizionata tra una parete fissa ed una massa M=4 kg libera di muoversi lungo un tavolo orizzontale alto H=1.5 m rispetto al pavimento. La molla viene compressa di una quantità ΔL e quando viene liberata riesce a lanciare la massa M lungo il tavolo. Quando la molla raggiunge la sua lunghezza a riposo, nel punto P, la massa M si distacca ed affronta un tratto di lunghezza L=1 m in cui il piano diviene scabro (μ_d=0.2). Successivamente la massa cade dal tavolo in modo da sorpassare una barriera di altezza H/4 posizionata ad una distanza a=50 cm dalla base del tavolo. Determinare il valore minimo della compressione ΔL della molla per poter superare tale barriera.

1. Moto lungo il piano orizzontale

Durante il moto lungo il piano orizzontale la massa, sospinta dalla molla fino in P, affronta un tratto con attrito L giungendo sul bordo del tavolo con velocità vo. L'energia meccanica iniziale in (1) è superiore all'energia meccanica sul bordo del tavolo in (2) a causa della dissipazione per attrito



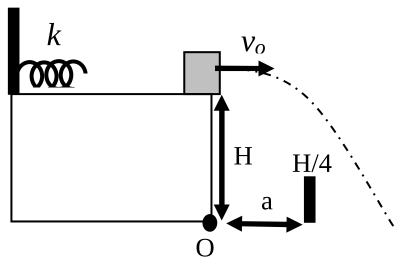
Energia meccanica in (1) $E_1 = \frac{1}{2} k \cdot \Delta L^2$

Energia meccanica in (2) $E_2 = \frac{1}{2} m \cdot v_o^2$

Lavoro delle forze non conservative $L_{nc} = -A_d \cdot L = -\mu_d mgL = E_2 - E_1$

da cui la compressione della molla deve valere $\Delta L = \sqrt{\frac{m}{k}} \sqrt{v_o^2 + 2\mu_d gL}$ **(Eq.1)**

Caduta dal tavolo. Le grandezze cinematiche sono scomposte secondo gli assi x,y rispetto all'origine posizionato alla base del tavolo



Lungo l'asse x $\begin{cases} x(t) = v_o \cdot t \\ v_x(t) = v_o \\ a_x = 0 \end{cases}$, e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = H - gt^2/2 \\ v_y(t) = -gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Il blocco sorvola l'ostacolo attraversando il piano **x=a** al tempo **t=a/v₀**

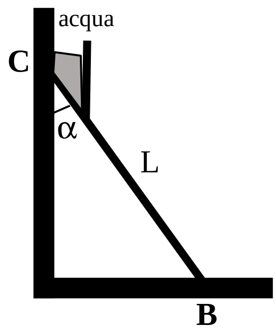
In quell'istante il blocco ha una ordinata $y(t) = H - \frac{g \cdot t^2}{2} = H - \frac{g \cdot a^2}{2 \cdot v_o^2}$

La condizione di superamento dell'ostacolo impone che $y(t) > H/4$

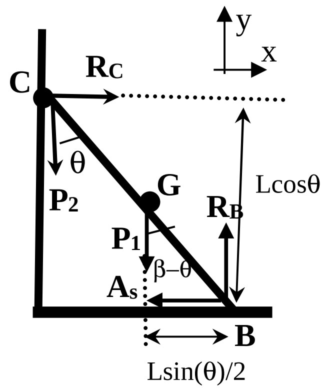
da cui $\frac{3}{4} H > \frac{g \cdot a^2}{2 \cdot v_o^2}$ e quindi $v_o > a\sqrt{\frac{2 \cdot g}{3 \cdot H}}$ **(Eq.2)**

Combinando la Eq.1 con la Eq.2 si ottiene $\Delta L > \sqrt{\frac{m}{k}} \sqrt{\frac{2ga^2}{3H} + 2\mu_d gL} = \sqrt{\frac{2mg}{k}} \sqrt{\frac{a^2}{3H} + \mu_d L} =$ **1 m**

2. Una scala di massa m_1=20 kg e di lunghezza L=4m è appoggiata ad una parete verticale in un punto C, inclinata di un angolo α=30° rispetto alla verticale. La scala poggia anche nel punto B sul pavimento scabro ossia in grado di sviluppare anche una forza di attrito (μ_s=0.3) che garantisce la statica della scala. Sulla sommità della scala (nel punto C) è posizionato un contenitore, inizialmente vuoto e privo di massa, che raccoglie l'acqua piovana. Durante una intensa pioggia il contenitore accresce la sua massa di 5kg/h. Determinare dopo quanto tempo dall'inizio della pioggia la scala scivola perdendo la stabilità. [Trascurare le dimensioni del contenitore]



2. Le forze agenti sull'asta sono: la forza peso $\mathbf{P_1=m_1g}$ applicata nel baricentro G, la reazione normale del pavimento $\mathbf{R_B}$ e l'attrito statico $\mathbf{A_s}$ applicate in B, mentre applicate nel punto C sono presenti la reazione normale dalla parete verticale $\mathbf{R_C}$ e la forza peso $\mathbf{P_2=m_2g}$ esercitata dall'acqua nella cisterna applicate In condizione statiche devono essere contemporaneamente nulle entrambe le equazioni cardinali.



Proiettando la 1ª equazione cardinale lungo x, y:

$$\begin{array}{l} x) \\ y) \end{array}\begin{cases} R_C - A_s = 0 \\ -P_1 - P_2 + R_B = 0 \end{cases} \text{da cui} \begin{cases} A_s = R_C \\ R_B = P_1 + P_2 \end{cases}$$

Calcolando la 2ª equazione cardinale nel punto B

$$M_{RC} + M_{P1} + M_{P2} = R_C L\cos\theta - P_1 L\sin\theta/2 - P_2 L\sin\theta = 0 \quad \text{(verso positivo rotazione oraria in B)}$$

da cui si ricava l'intensità della forza $R_C = \left(\frac{P_1}{2} + P_2\right)\tan\theta$

combinando le equazioni si ottiene per l'attrito statico

$$A_s = R_C = \left(\frac{P_1}{2} + P_2\right)\tan\theta \le \mu_s R_B = \mu_s(P_1 + P_2)$$

$$\text{da cui} \quad P_2(\tan\theta - \mu_s) \le P_1\left(\mu_s - \frac{\tan\theta}{2}\right)$$

per cui la massima massa d'acqua sostenibile è $M_2 \le M_1\left(\frac{\mu_s - \frac{\tan\theta}{2}}{\tan\theta - \mu_s}\right) = \mathbf{0.817\ kg}$

definendo infine la portata d'acqua dovuta alla pioggia **q=5kg/h** si ottiene il momento in cui la scala diventa instabile **t=M₂/q=588 s**