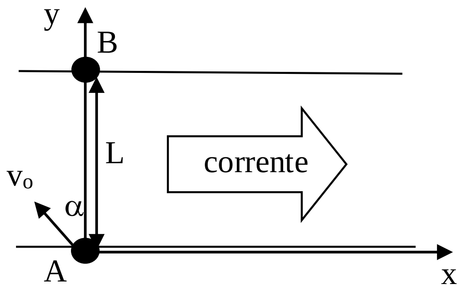
FISICA

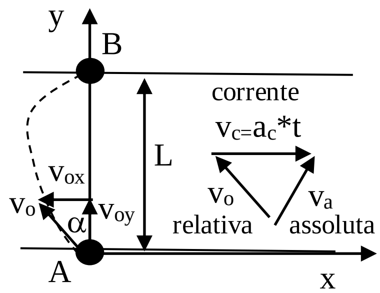
A.A. 2018-2019
Ingegneria Gestionale
1° appello del 21 Giugno 2019
Esame completo - Soluzioni

1. Testo. In un tratto di fiume largo L=30 m esiste una corrente che spinge i natanti con una velocità crescente uniformemente nel tempo con legge $v_c=a_c*t$ ($a_c=0.2 m/s^2$) lungo la direzione x. Dovendo attraversare il fiume un uomo si tuffa all'istante t=0 nel punto A e si mette a nuotare con una velocità relativa all'acqua costante v_o lievemente controcorrente con un angolo di inclinazione α=20° rispetto alla normale alla sponda come indicato in figura. Partendo dal punto A e volendo raggiungere il punto B sulla sponda opposta si determini il valore della velocità relativa v_o con cui l'uomo dovrà costantemente nuotare.



1. Soluzione. Nel sistema fisso l'accelerazione assoluta si ottiene sommando quella relativa (che è nulla) con quella di trascinamento della corrente

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_C = \vec{a}_C$$



La velocità nel sistema fisso viene ottenuta integrando $\vec{v}_a = \vec{v}_o + \vec{a}_C t$

Integrando di nuovo si ottiene la posizione del nuotatore $\vec{r}_a = \vec{v}_o t + \vec{a}_C\, t^2/2$

Proiettando tutte le grandezze cinematiche nel sistema fisso lungo gli assi tangenziale (x) e normale (y) si ottengono le relazioni:

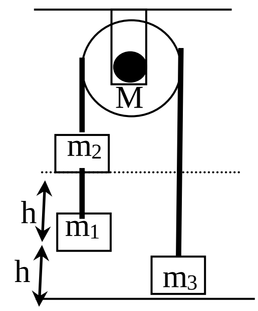
lungo l'asse y $\begin{cases} y = v_o t \cos\alpha \\ v_y = v_o \cos\alpha \\ a_y = 0 \end{cases}$, lungo l'asse x $\begin{cases} x = -v_o t \sin\alpha + a_C\, t^2/2 \\ v_x = -v_o \sin\alpha + a_C t \\ a_x = a_C \end{cases}$

Il **tempo di attraversamento** del fiume per raggiungere il punto di approdo sulla sponda opposta B(0,L) si ottiene imponendo y(t*)=L da cui $t^*=L/v_o\cos\alpha$=**10.45 s**.

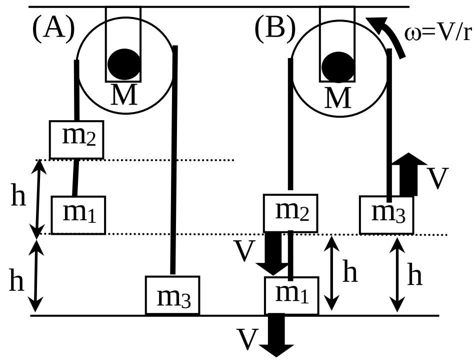
L'ascissa del punto B si ottiene dalla $x(t^*) = -v_o t^* \sin\alpha + a_t\, t^{*2}/2 = -L tg\alpha + \frac{a_t}{2}\frac{L^2}{v_o^2\cos^2\alpha} = 0$

Imponendo che x(t*)=0 si ottiene la **velocità relativa del nuotatore** $v_o = \sqrt{\frac{a_t L}{2\sin\alpha\cos\alpha}}$ = **3.06 m/s**

2. Testo. Una macchina di Atwood è composta da una massa m_3=5kg ferma a terra che viene sollevata da un sistema costituito da una puleggia di massa M=2kg due masse m_1=3kg , m_2=3kg appese lungo la fune ad altezze rispettivamente h=2m e 2h=4m da terra (come in figura). Il sistema comincia a muoversi e la massa m_3 si comincia a sollevare fino a quando la massa m_1 si appoggia sul terreno sganciandosi dalla macchina di Atwood che si alleggerisce. Determinare la quota massima cui si solleva la massa m_3 rispetto al terreno prima di ritornare al punto di partenza.



2. Soluzione. Determinazione della velocità di caduta quando m_1 urta il terreno



Durante il passaggio dallo stato A allo stato B, poiché gli attriti presenti tra la puleggia e la fune non compiono lavoro, **l'energia meccanica del sistema si conserva**.
Nello stato A tutte le masse sono in quiete (assenza di energia cinetica). L'energia meccanica è data dalla sola energia potenziale di tutte le masse

$$E_A = U_A = m_1 gh + m_2 g(2h) = \mathbf{178.2\ J}$$

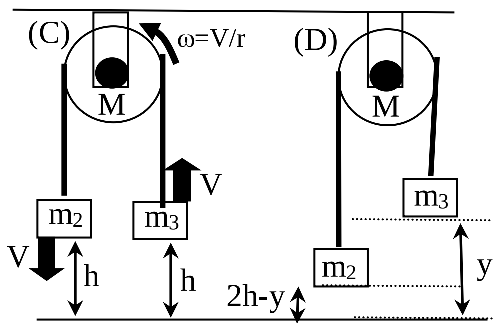
Nello stato B tutte le masse si muovono alla velocità V e la puleggia ruota alla velocità angolare ω=V/r. L'energia cinetica si ottiene sommando le energie cinetiche traslazionale delle masse m_1, m_2, m_3 che vale $K_{tra} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)V^2$ con quella rotazionale della puleggia $K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Mr^2\right)\left(\frac{V}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{2}V^2$ così che l'energia cinetica complessiva nello stato B diviene $K_B = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + m_3 + \frac{M}{2}\right)V^2$ che sommata alla energia potenziale di tutte le masse da luogo all'energia meccanica complessiva

$$E_B = U_B + K_B = [m_2 gh + m_3 gh] + \left[\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + m_3 + \frac{M}{2}\right)V^2\right] = \mathbf{178.2\ J}$$

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra A e B ($E_A = E_B$) si ottiene la velocità

$$V = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{m_1 + m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + \frac{M}{2}}} = \mathbf{1.82\ m/s}$$

Determinazione della massima quota raggiunta da m_3 durante il moto da C a D



Durante il passaggio dallo stato B allo stato C, la massa m_1 urta anelasticamente contro il terreno e si sgancia dal sistema facendo perdere energia meccanica. La velocità V non subisce variazione da B a C, ma l'accelerazione cambia il verso. Durante il passaggio dallo stato C allo stato D **l'energia meccanica del sistema si conserva**.
Nello stato C l'energia meccanica

$$E_C = U_C + K_C = [m_2 gh + m_3 gh] + \left[\frac{1}{2}\left(m_2 + m_3 + \frac{M}{2}\right)V^2\right] = \mathbf{173.2\ J}$$

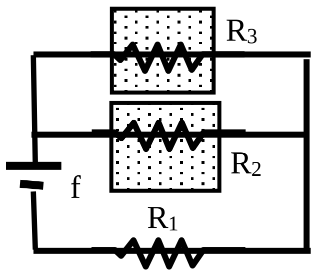
Nello stato D il sistema inverte il suo moto e tutte le masse si fermano un istante (assenza di energia cinetica). L'energia meccanica è data dalla sola energia potenziale di tutte le masse

$$E_D = U_D = m_2 g(2h - y) + m_3 gy = \mathbf{173.2\ J}$$

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra C e D ($E_C=E_D$) si ottiene l'espressione della massima quota y della massa m_3

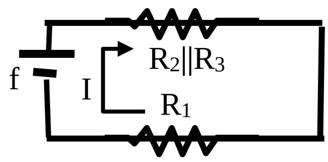
$$y = h + \frac{V^2}{2g}\left(\frac{m_2 + m_3 + \frac{M}{2}}{m_3 - m_2}\right) = h\left[1 + \left(\frac{m_2 + m_3 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + m_3 + \frac{M}{2}}\right)\left(\frac{m_1 + m_2 - m_3}{m_3 - m_2}\right)\right] = \mathbf{2.75\ m}$$

3. Testo. Il dispositivo in figura si compone di un circuito resistivo alimentato da una forza elettromotrice f=100V. I resistori $R_2=5\Omega$ ed $R_3=20\Omega$ sono utilizzati come bollitori dove all'interno ci sono due masse di acqua distillata da riscaldare rispettivamente $M_2=100$g ed $M_3=50$g. La resistenza $R_1=6\Omega$ chiude poi il circuito. Tutto il sistema è inizialmente tenuto a 20°C. Determinare quale dei due bollitori raggiunge per primo la temperatura di ebollizione, dopo quanto tempo e determinare in quell'istante la temperatura dell'altro bollitore (calore specifico acqua C=4187 J/kg K)



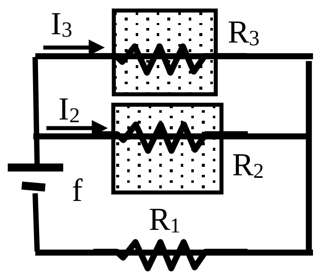
3. Soluzione.

Nel circuito elettrico equivalente, essendo la resistenza parallelo $\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \mathbf{4\Omega}$



la **intensità di corrente elettrica** erogata dalla batteria vale

$$I = \frac{f}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = \frac{f}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \mathbf{10\ A}$$



con una tensione ai capi dei due resistori $\Delta V = I_2 R_2 = I_3 R_3 = I \cdot \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \mathbf{40V}$

da questo dato si calcola la ripartizione delle correnti nei due resistori R_2 ed R_3

$I_2 = \frac{\Delta V}{R_2} = I\,\frac{R_3}{R_2 + R_3} = \mathbf{8\ A,}$ mentre $I_3 = \frac{\Delta V}{R_3} = I\,\frac{R_2}{R_2 + R_3} = \mathbf{2\ A}$

con le relative potenze dissipate sul resistore k-esimo $P_k = I_k^2 R_k = \begin{cases} P_2 = 320W \\ P_3 = 80W \end{cases}$

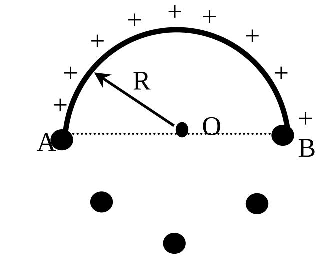
e calore prodotto nel corrispondente calorimetro $Q_k = P_k \cdot \Delta t$

Il primo bollitore (su R_2) raggiunge la temperatura di ebollizione T_v=100°C dopo un tempo $\Delta t_2 = \frac{CM_2(T_v - T_o)}{P_2} = \mathbf{104.7\ s}$.

Il secondo bollitore (su R_3) raggiunge la temperatura di ebollizione T_v=100°C dopo un tempo $\Delta t_3 = \frac{CM_3(T_v - T_o)}{P_3} = \mathbf{209.4\ s}$ successivamente al primo bollitore.

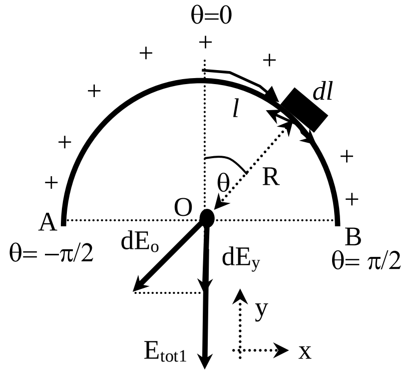
Quando il primo bollitore raggiunge la temperatura di 100°C al tempo $\Delta t_2 = \mathbf{104.7\ s}$, il secondo bollitore si troverà alla temperatura intermedia $T_3 = T_o + \frac{P_3 \cdot \Delta t_2}{C \cdot M_3} = \mathbf{60\ °C}$

4. Testo. Su una circonferenza di raggio R=2cm e di centro O vengono poste due distribuzioni di carica: nella parte superiore una distribuzione uniforme con densità lineare λ=50μC/m; nella parte inferiore un sistema di 5 cariche puntiformi di valore **q** equispaziate come indicato in figura da A a B. Determinare il valore di **q** per il quale il campo elettrico in O si annulla



4. Soluzione. Campo elettrico generato dalla semicirconferenza

La carica infinitesima *dq* disposta sull'elemento di lunghezza infinitesima *dl*, genera nel punto *O* (alla distanza *R*) un contributo di campo elettrico $dE_o = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \dfrac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \dfrac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_o R}$ diretto come in figura dove la carica *dq* sull'arco si scrive come $dq=\lambda dl=\lambda R\, d\theta$.



Assumendo per ragioni di σιμμετρια il vettore risultante E_{tot1} tutto diretto lungo l'asse delle *y (in senso contrario)* si conviene di proiettare il contributo efficace di campo elettrico lungo l'asse *y*

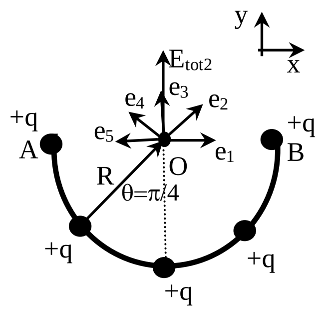
$dE_y = -dE_o \cos\theta$ (*il segno indica che è in senso opposto all'asse y*)

per poi integrarlo su tutta la distribuzione per ottenere E_{tot1}

$$E_{tot1} = \int dE_y = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R} d\theta = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_o R}\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_o R}$$

Campo elettrico generato dalle 5 cariche puntiformi

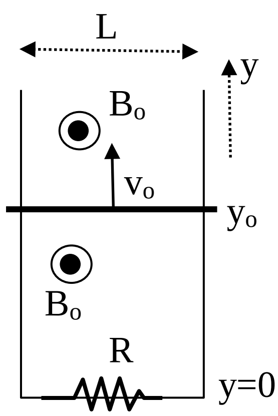
Il campo elettrico generato nel punto O dalle 5 cariche puntiformi è $e_k = \dfrac{q_k}{4\pi\varepsilon_o R^2}$ dove q_k=q. Per ragioni di simmetria il vettore risultante E_{tot2} sarà ancora tutto diretto lungo l'asse y per cui si conviene di proiettare tutti i contributi sull'asse y così da avere



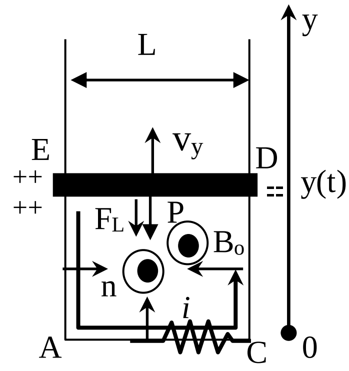
$$E_{tot2} = \sum_k e_k \cos\theta_k = e_2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + e_3 + e_4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

La condizione di annullamento del campo si ha quando $E_{tot1}+E_{tot2}=0$ da cui $q = \dfrac{2\lambda R}{1+\sqrt{2}} = \mathbf{0.41\ \mu C}$

5. Testo. Una barretta metallica di lunghezza L=20cm, di resistenza elettrica R=5Ω e di massa m=20g può scorrere mediante contatti striscianti su due guide metalliche verticali connesse elettricamente fra di loro senza apprezzabile resistenza, definendo così una maglia rettangolare dove può scorrere corrente. La barretta viene lanciata verso l'alto (y) con velocità iniziale v_o=3m/s contro la forza di gravità dalla altezza y_o=50cm dalla base y=0, mantenendo sempre il contatto elettrico. Il sistema è soggetto ad un vettore B_o=0.5T uniforme orizzontale come riportato in figura. Calcolare dopo quanto tempo dal lancio la barra inverte il suo moto **Facoltativo:** calcolare la massima quota raggiunta.



5. Soluzione. La barretta DE chiude il circuito ACDE.



Il vettore induzione magnetica si concatena con tale circuito dando origine ad un flusso variabile nel tempo $\Phi_C = \int_{ACDE} \vec{B}\cdot\hat{n}dS = B_o L y(t)$

dove y(t) è la posizione mobile della barretta.

Il movimento della barretta causa una variazione di flusso concatenato nel circuito *ACDE* generando una forza elettromotrice indotta

$$f_i = -\frac{d\Phi_C}{dt} = -B_o L\frac{dy}{dt} = -B_o L v_y \quad \text{(legge di Faraday-Neumann-Lenz)}$$

dove il segno negativo indica che la corrente circola ma in senso orario, ossia nel verso opposto a quello considerato positivo rispetto a B_o (regola mano destra). L'intensità di questa corrente indotta risulta quindi $i_i = \frac{f_i}{R} = -\frac{B_o L v_y}{R}$ nel senso opposto a quello indicata in figura.

A causa della corrente indotta i quattro lati del circuito subiranno delle forze attrattive di natura magnetica, in accordo alla seconda formula di Laplace $\vec{F} = i_i \int d\vec{l}\times\vec{B}_o$

In particolare sull'unico lato mobile *DE* viene generata una forza frenante $F_L = i_i L B_o = -B_o^2 L^2 v_y / R$ contraria al moto (asse y) che si aggiunge alla forza peso P=mg. Applicando il II principio della dinamica lungo l'asse y

$$-mg - \frac{B_o^2 L^2}{R} v_y = m a_y = m\frac{dv_y}{dt} \quad \text{ossia} \quad \frac{dv_y}{dt} + \left(\frac{1}{\tau}\right) v_y = -g \quad \text{dove} \quad \tau = \frac{mR}{B_o^2 L^2} = \mathbf{10\ s}$$

Risolvendo l'equazione differenziale risultante ed imponendo la velocità della barretta iniziale

$$v_y = -g\tau + (v_o + g\tau)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Imponendo v_y=0 si ottiene l'istante di inversione de moto della barretta $t^* = \tau\cdot\ln\left(\frac{v_o + g\tau}{g\tau}\right) = \mathbf{0.30\ s}$

Facoltativo: Integrando si ottiene $y = y_o + \int_0^t v_y dt$ ossia $y = y_o - g\tau\cdot t + \left(v_o\tau + g\tau^2\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$

che assume il valore massimo in t*=**0.30 s** quando la barretta raggiunge quota y(t*)= **95 cm**