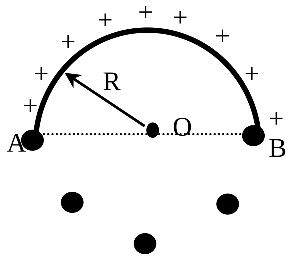
FISICA

A.A. 2018-2019

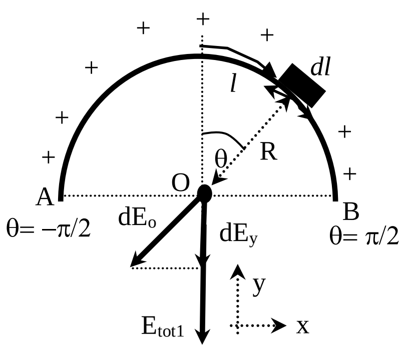
Ingegneria Gestionale

1° appello del 21 Giugno 2019

Secondo Esonero - Soluzioni



1. Testo. Su una circonferenza di raggio R=2cm e di centro O vengono poste due distribuzioni di carica: nella parte superiore una distribuzione uniforme con densità lineare λ=50μC/m; nella parte inferiore un sistema di 5 cariche puntiformi di valore **q** equispaziate come indicato in figura da A a B. Determinare il valore di **q** per il quale il campo elettrico in O si annulla



1. Soluzione. Campo elettrico generato dalla semicirconferenza

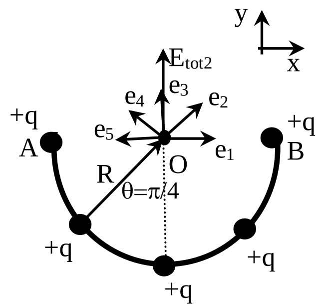
La carica infinitesima *dq* disposta sull'elemento di lunghezza infinitesima *dl*, genera nel punto *O* (alla distanza *R*) un contributo di campo elettrico $dE_o = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \dfrac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \dfrac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_o R}$ diretto come in figura dove la carica *dq* sull'arco si scrive come $dq=\lambda dl= \lambda R\, d\theta$.

Assumendo per ragioni di σιμμετρια il vettore risultante E_{tot1} tutto diretto lungo l'asse delle *y (in senso contrario)* si conviene di proiettare il contributo efficace di campo elettrico lungo l'asse *y*

$dE_y = -dE_o \cos\theta$ (*il segno indica che è in senso opposto all'asse y*)

per poi integrarlo su tutta la distribuzione per ottenere E_{tot1}

$$E_{tot1} = \int dE_y = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R} d\theta = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_o R}\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_o R}$$

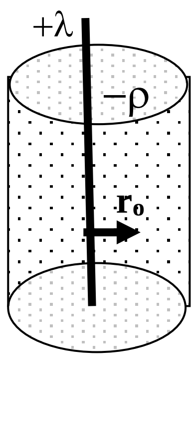


Campo elettrico generato dalle 5 cariche puntiformi

Il campo elettrico generato nel punto O dalle 5 cariche puntiformi è $e_k = \dfrac{q_k}{4\pi\varepsilon_o R^2}$ dove q_k=q. Per ragioni di simmetria il vettore risultante E_{tot2} sarà ancora tutto diretto lungo l'asse y per cui si conviene di proiettare tutti i contributi sull'asse y così da avere

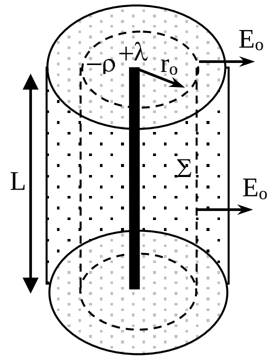
$$E_{tot2} = \sum_k e_k \cos\theta_k = e_2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + e_3 + e_4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

La condizione di annullamento del campo si ha quando $E_{tot1}+E_{tot2}=0$ da cui $q = \dfrac{2\lambda R}{1+\sqrt{2}} = \mathbf{0.41\ \mu C}$



2. Testo. Un cilindro di lunghezza infinita e di raggio R=10cm è carico con densità volumetrica uniforme ρ=−50μC/m^3. All'interno sull'asse del cilindro c'è un filo infinitamente lungo con densità lineare uniforme λ=1μC/m. Determinare a quale distanza $\mathbf{r_o}$ dall'asse si trovano i punti interni per i quali il campo elettrico si annulla.

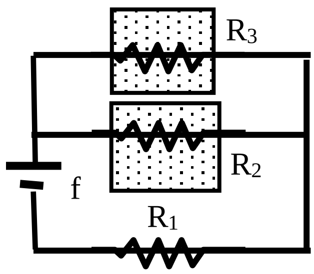
2. Soluzione. Il campo elettrico interno al cilindro può essere calcolato applicando la legge di Gauss alla superficie cilindrica Σ concentrica, di lunghezza L e di raggio interno $r_o<R$



$$\Phi_\Sigma\left(\vec{E}_o\right)=\int_\Sigma \vec{E}_o\cdot\hat{n}_{ext}dS=\left(2\pi r_o L\right)E_o=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o}=\frac{-\rho\left(\pi r_o^2 L\right)+\lambda L}{\varepsilon_o}=0$$

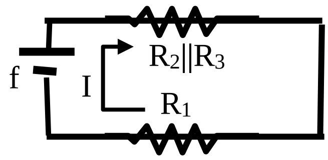
dove la Q_{int} è la somma algebrica della carica interna al cilindro di Gauss proveniente dalle due distribuzioni. Imponendo la condizione di nullità del campo elettrico E_o e del flusso Φ nella posizione di equilibrio si ricava dall'annullamento dell'ultimo membro la posizione interna $r_o=\sqrt{\dfrac{\lambda}{\pi\rho}}=$ **7.98 cm**

3. Testo. Il dispositivo in figura si compone di un circuito resistivo alimentato da una forza elettromotrice f=100V. I resistori $R_2=5\Omega$ ed $R_3=20\Omega$ sono utilizzati come bollitori dove all'interno ci sono due masse di acqua distillata da riscaldare rispettivamente $M_2=100$g ed $M_3=50$g. La resistenza $R_1=6\Omega$ chiude poi il circuito. Tutto il sistema è inizialmente tenuto a 20°C. Determinare quale dei due bollitori raggiunge per primo la temperatura di ebollizione, dopo quanto tempo e determinare in quell'istante la temperatura dell'altro bollitore (calore specifico acqua C=4187 J/kg K)



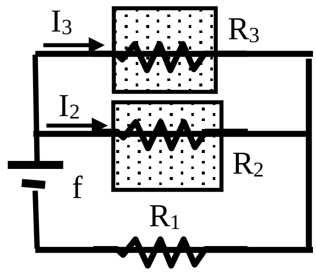
3. Soluzione.

Nel circuito elettrico equivalente, essendo la resistenza parallelo $\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}=\mathbf{4\Omega}$



la **intensità di corrente elettrica** erogata dalla batteria vale

$$I=\frac{f}{R_1+R_2\parallel R_3}=\frac{f}{R_1+\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}}=\mathbf{10\ A}$$



con una tensione ai capi dei due resistori $\Delta V=I_2R_2=I_3R_3=I\cdot\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}=\mathbf{40V}$

da questo dato si calcola la ripartizione delle correnti nei due resistori R_2 ed R_3

$I_2=\dfrac{\Delta V}{R_2}=I\,\dfrac{R_3}{R_2+R_3}=\mathbf{8\ A},$ mentre $I_3=\dfrac{\Delta V}{R_3}=I\,\dfrac{R_2}{R_2+R_3}=\mathbf{2\ A}$

con le relative potenze dissipate sul resistore k-esimo $P_k=I_k^2R_k=\begin{cases}P_2=320W\\ P_3=80W\end{cases}$

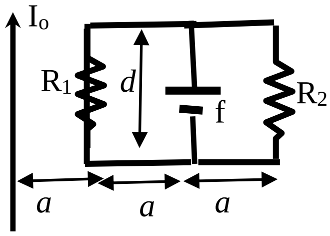
e calore prodotto nel corrispondente calorimetro $Q_k=P_k\cdot\Delta t$

Il primo bollitore (su R_2) raggiunge la temperatura di ebollizione T_v=100°C dopo un tempo $\Delta t_2=\dfrac{CM_2\left(T_v-T_o\right)}{P_2}=$ **104.7 s** .

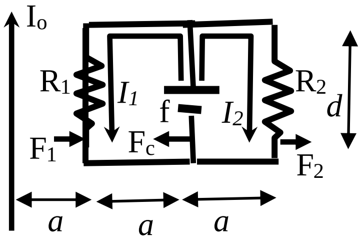
Il secondo bollitore (su R_3) raggiunge la temperatura di ebollizione T_v=100°C dopo un tempo $\Delta t_3=\dfrac{CM_3\left(T_v-T_o\right)}{P_3}=$ **209.4 s** successivamente al primo bollitore.

Quando il primo bollitore raggiunge la temperatura di 100°C al tempo $\Delta t_2=$ **104.7 s**, il secondo bollitore si troverà alla temperatura intermedia $T_3=T_o+\dfrac{P_3\cdot\Delta t_2}{C\cdot M_3}=$ **60 °C**

4. Testo. Un filo infinitamente lungo è percorso dalle corrente I_o. Una spira rettangolare di due maglie come in figura giace nello stesso piano del filo ad una distanza a=5cm da esso. Quando l'interruttore si chiude all'istante t=0 nelle maglie del circuito circolano correnti e si sviluppa una forza di repulsione o di attrazione con il filo. Determinare per quale valore della resistenza R_2 la spira non è né attratta né respinta dal filo. Dati del problema: R_1=18Ω.



4. Soluzione. Calcolo delle correnti circolanti nella spira
Sui vari elementi della spira rettangolare circolano differenti correnti:
nel lato della resistenza R_1 c'è una corrente $I_1 = f/R_1$ verso il basso
nel lato della resistenza R_2 c'è una corrente $I_2 = f/R_2$ verso il basso
nel lato della batteria scorre verso l'alto la corrente somma I_1+I_2



Calcolo delle correnti circolanti nella spira
La spira è sottoposta a forze magnetiche interne ed esterne. Le forze magnetiche interne dovute al campo magnetico da essa stessa generato hanno risultante nulla e quindi nel caso di una spira rigida non danno alcun effetto. Le forze magnetiche esterne sono quelle dovute al campo magnetico B_o generato dalla corrente I_o in corrispondenza dei vari lati della spira. Tali forze esterne ben descritte dalla 2ª formula di Laplace. Vengono di seguito calcolate solo quelle sui tre lati verticali della spira, perché quelle sui lati orizzontali hanno sempre risultante nulla:

$F_1 = B_{o1} I_1 d = \dfrac{\mu_o I_o}{2\pi a} I_1 d$ (sul lato verticale del resistore R_1. E' orizzontale nel verso repulsivo +)

$F_2 = B_{o2} I_2 d = \dfrac{\mu_o I_o}{2\pi (3a)} I_2 d$ (sul lato verticale del resistore R_2. E' orizzontale nel verso repulsivo +)

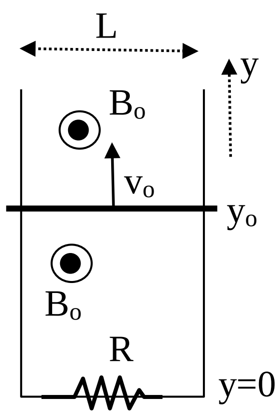
$F_c = B_{oc} (I_1 + I_2) d = \dfrac{\mu_o I_o}{2\pi (2a)} (I_1 + I_2) d$ (sul lato centrale della f. Orizzontale con verso attrattivo -)

Imponendo l'annullamento della risultante delle forze orizzontali

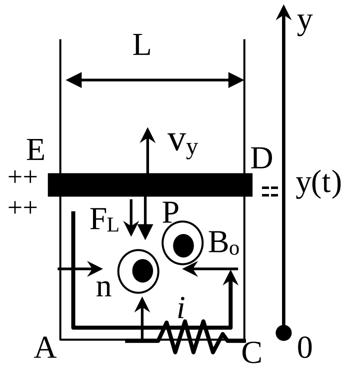
$$F_1 + F_2 + F_c = \frac{\mu_o I_o}{2\pi} d \left[\frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{3a} - \frac{I_1 + I_2}{2a} \right] = 0$$

L'annullamento del termine in parentesi quadra porta alla condizione $I_2=3I_1$
che diviene $f/R_2=3f/R_1$ consentendo di determinare la **resistenza incognita $R_2=R_1/3=6\Omega$**

5. Testo. Una barretta metallica di lunghezza L=20cm, di resistenza elettrica R=5Ω e di massa m=20g può scorrere mediante contatti striscianti su due guide metalliche verticali connesse elettricamente fra di loro senza apprezzabile resistenza, definendo così una maglia rettangolare dove può scorrere corrente. La barretta viene lanciata verso l'alto (y) con velocità iniziale v_o=3m/s contro la forza di gravità dalla altezza y_o=50cm dalla base y=0, mantenendo sempre il contatto elettrico. Il sistema è soggetto ad un vettore B_o=0.5T uniforme orizzontale come riportato in figura. Calcolare dopo quanto tempo dal lancio la barra inverte il suo moto **Facoltativo:** calcolare la massima quota raggiunta.



5. Soluzione. La barretta DE chiude il circuito ACDE.



Il vettore induzione magnetica si concatena con tale circuito dando origine ad un flusso variabile nel tempo $\Phi_C = \int_{ACDE} \vec{B}\cdot\hat{n}dS = B_o L y(t)$

dove y(t) è la posizione mobile della barretta.

Il movimento della barretta causa una variazione di flusso concatenato nel circuito *ACDE* generando una forza elettromotrice indotta

$$f_i = -\frac{d\Phi_C}{dt} = -B_o L\frac{dy}{dt} = -B_o L v_y \quad \text{(legge di Faraday-Neumann-Lenz)}$$

dove il segno negativo indica che la corrente circola ma in senso orario, ossia nel verso opposto a quello considerato positivo rispetto a B_o (regola mano destra). L'intensità di questa corrente indotta risulta quindi $i_i = \frac{f_i}{R} = -\frac{B_o L v_y}{R}$ nel senso opposto a quello indicata in figura.

A causa della corrente indotta i quattro lati del circuito subiranno delle forze attrattive di natura magnetica, in accordo alla seconda formula di Laplace $\vec{F} = i_i\int d\vec{l}\times\vec{B}_o$

In particolare sull'unico lato mobile *DE* viene generata una forza frenante $F_L = i_i L B_o = -B_o^2 L^2 v_y / R$ contraria al moto (asse y) che si aggiunge alla forza peso P=mg. Applicando il II principio della dinamica lungo l'asse y

$$-mg - \frac{B_o^2 L^2}{R}v_y = ma_y = m\frac{dv_y}{dt} \quad \text{ossia} \quad \frac{dv_y}{dt} + \left(\frac{1}{\tau}\right)v_y = -g \quad \text{dove } \tau = \frac{mR}{B_o^2 L^2} = \mathbf{10\ s}$$

Risolvendo l'equazione differenziale risultante ed imponendo la velocità della barretta iniziale

$$v_y = -g\tau + (v_o + g\tau)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Imponendo v_y=0 si ottiene l'istante di inversione de moto della barretta $t^* = \tau\cdot\ln\left(\frac{v_o + g\tau}{g\tau}\right) = \mathbf{0.30\ s}$

Facoltativo: Integrando si ottiene $y = y_o + \int_0^t v_y dt$ ossia $y = y_o - g\tau\cdot t + \left(v_o\tau + g\tau^2\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$

che assume il valore massimo in t*=**0.30 s** quando la barretta raggiunge quota y(t*)= **95 cm**