



FISICA

A.A. 2016-2017

Ingegneria Gestionale

1° appello del 15 Giugno 2017

Esame completo – Testo e Soluzioni

1. Un blocco di massa $M=600$ g si muove su un piano orizzontale con un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d=0.3$. Nell'istante in cui il blocco ha velocità $v_A=5$ m/s viene colpito da un proiettile di massa $m=100$ g sparato orizzontalmente con una velocità $v_B=100$ m/s nella stessa direzione ma verso opposto di v_A . Il proiettile dopo l'impatto (supposto istantaneo) rimane conficcato nel blocco. Calcolare la lunghezza del tratto percorso dal blocco prima di fermarsi a partire dall'istante in cui viene colpito e calcolare dopo quanto tempo si ferma.

1. Urto perfettamente anelastico fra proiettile e blocco

Nell'urto perfettamente anelastico si conserva la quantità di moto fra (a) e (b)

$$mv_B - MV_A = (M + m) \cdot V_c \quad (\text{positivo verso destra})$$

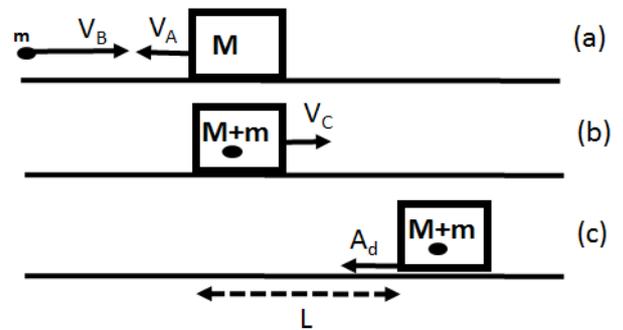
$$\text{da cui } V_c = \frac{mv_B - MV_A}{M + m} = 10 \text{ m/s}$$

Moto uniformemente ritardato dall'attrito

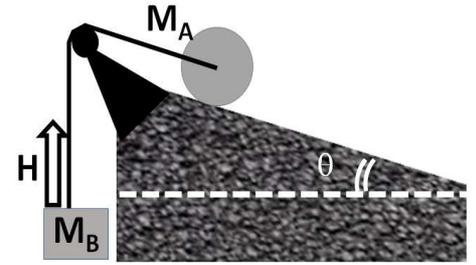
Successivamente all'urto il sistema delle due masse $(M+m)$ procede di moto uniformemente ritardato con decelerazione $a=\mu_d g$ e le equazioni della cinematica divengono

$$\begin{cases} s = V_c t - \mu_d g t^2 / 2 \\ v = V_c - \mu_d g t \\ a = -\mu_d g \end{cases} \quad \text{Il sistema si arresta dopo l'intervallo di tempo } t = \frac{V_c}{\mu_d g} = 3.4 \text{ s}$$

$$\text{e dopo aver percorso lo spazio } L = s(t) = \frac{V_c^2}{2\mu_d g} = 17 \text{ m}$$



2. Un cilindro di raggio r e di massa $M_A=6\text{kg}$ è posto sulla sommità di un piano inclinato di angolo $\theta=30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il cilindro inizialmente fermo comincia a rotolare senza strisciare molto lentamente anche a causa di un contrappeso di massa $M_B=1\text{kg}$ che è collegato all'asse del cilindro tramite fune e puleggia di masse trascurabili. Determinare la velocità con cui sale il contrappeso dopo essere salito di una altezza $H=50\text{cm}$. Calcolare il tempo impiegato [Si assuma $I_{\text{cil}}=M_A r^2/2$].

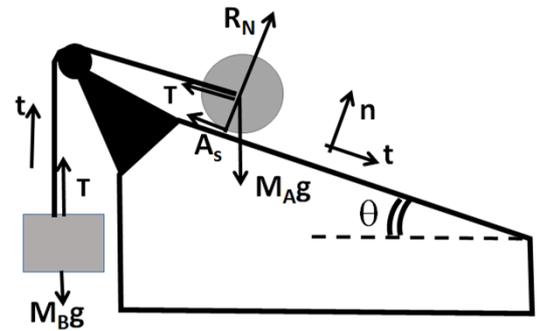


Facoltativo: calcolare il coeff. di attrito statico minimo che consente il rotolamento del cilindro

2. Equazioni cardinali per il cilindro

Le forze agenti sul cilindro sono:

- la forza peso $M_A g$ applicata nel baricentro del cilindro;
- la tensione T applicata al baricentro e contraria al moto lungo t ;
- la reazione normale R_n applicata sul punto di contatto e lungo n ;
- la forza di attrito statico A_s applicata sul punto di contatto e contraria al moto di discesa lungo t .



La **1ª equazione cardinale** proiettata lungo gli assi n, t

$$\hat{t} \left\{ \begin{aligned} M_A g \sin \theta - A_s - T &= M_A a_c \\ \hat{n} \left\{ \begin{aligned} R_n - M_A g \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

La **2ª equazione cardinale** calcolata rispetto ad un asse per il baricentro (solo l'attrito fornisce il momento necessario per fare rotolare il cilindro)

$$A_s r = I_c \frac{d\omega}{dt} = I_c \frac{a_c}{r} \quad \text{da cui} \quad A_s = \frac{I_c}{r^2} a_c \quad \text{dove } r \text{ è il raggio del cilindro}$$

La **massa M_B** viene invece sollevata a causa della tensione della fune T secondo il 2° principio $T - M_B g = M_B a_c$ da cui $T = M_B (g + a_c)$

dove l'accelerazione di salita del contrappeso coincide con quella di discesa del c.d.m. del cilindro

$$\text{Combinando le equazioni si ottiene: } M_A g \sin \theta - \frac{I_c}{r^2} a_c - M_B (a_c + g) = M_A a_c$$

da cui l'accelerazione del contrappeso che si solleva di moto rettilineo uniformemente accelerato

$$a_c = g \frac{M_A \sin \theta - M_B}{M_A + M_B + I_c/r^2} = g \frac{M_A \sin \theta - M_B}{3M_A/2 + M_B} = 0.2 g = 1.96 \text{ m/s}^2$$

la velocità in salita del contrappeso $v(t) = a_c t$, e lo spazio percorso $z(t) = a_c t^2 / 2 = H$

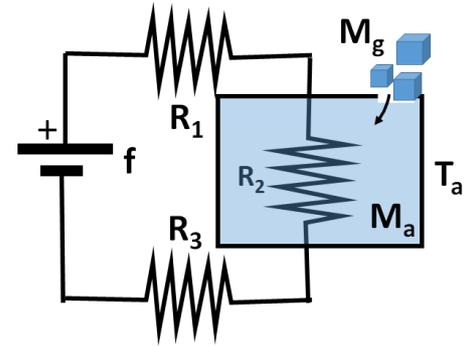
$$\text{da cui si calcola il tempo per raggiungere la quota } H \quad t = \sqrt{\frac{2H}{a_c}} = 0.714 \text{ s}$$

$$\text{e la relativa velocità } v = \sqrt{2a_c H} = \sqrt{2gH \frac{M_A \sin \theta - M_B}{3M_A/2 + M_B}} = 1.4 \text{ m/s}$$

Facoltativo: la verifica della condizione di rotolamento è sull'attrito statico:

$$A_s = \frac{I_c}{r^2} a_c = \frac{M_A}{2} a_c \leq A_{\text{max}} = \mu_s R_n = \mu_s M_A g \cos \theta \quad \text{da cui} \quad \mu_s \geq \frac{a_c}{2g \cos \theta} = 0.115$$

3. Il circuito resistivo in figura viene alimentato da una forza elettromotrice $f=200V$. Il ramo dove è presente la resistenza R_2 è soggetto ad un rudimentale sistema di climatizzazione in modo da mantenere la resistenza R_2 alla temperatura costante $T_a=10^\circ C$. Il sistema permette l'immersione del cavo (opportunamente isolato elettricamente) in un recipiente isolato contenente la massa d'acqua $M_A=2kg$ alla temperatura T_a (refrigerante). Durante il funzionamento del circuito elettrico è però necessario introdurre nel sistema refrigerante continuamente dei cubetti di ghiaccio fondente a $0^\circ C$. Determinare la massa di ghiaccio M_G che è necessario introdurre dopo ogni minuto per mantenere la temperatura del sistema a T_a . [Dati: $R_1=20\Omega$, $R_2=50\Omega$, $R_3=30\Omega$, calore latente di fusione del ghiaccio $q_f=80 \text{ kcal kg}^{-1}$, calore specifico dell'acqua $C=1 \text{ kcal kg}^{-1} K^{-1}$]



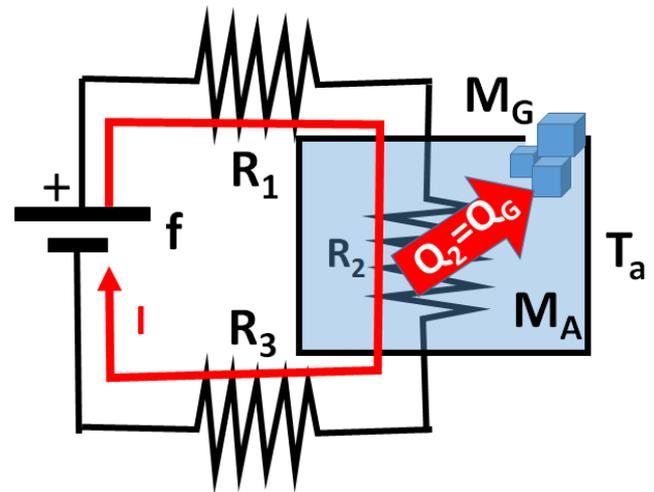
3. Il circuito elettrico è formato da una sola maglia.
La **intensità di corrente elettrica di maglia** vale

$$I = \frac{f}{R_1 + R_2 + R_3} = 2 \text{ A}$$

La **potenza dissipata** per effetto Joule sulla resistenza R_2 (dove è collocato il sistema refrigerante) vale

$$P_2 = I^2 R_2 = \frac{f^2 R_2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} = 200 \text{ W};$$

Il **calore sviluppato** per effetto Joule in un tempo τ dalla resistenza è $Q_2 = P_2 \tau$ (essendo P_2 costante nel tempo)



Nel sistema refrigerante inoltre gli altri scambi termici sono i seguenti:

a) la massa d'acqua M_A non scambia calore poichè la temperatura del sistema rimane invariata $Q_A = C M_A (T_A - T_A) = 0$

b) la massa di ghiaccio immessa nel sistema assorbe calore (latente di fusione) per il passaggio di stato in acqua e assorbe un calore aggiuntivo per portare la massa di ghiaccio M_G (già trasformata in acqua) dalla temperatura di fusione $0^\circ C$ fino alla temperatura di equilibrio del sistema T_A

Il calore assorbito complessivamente è quindi $Q_G = q_f M_G + C M_G (T_A - 0) = M_G (q_f + C T_A)$

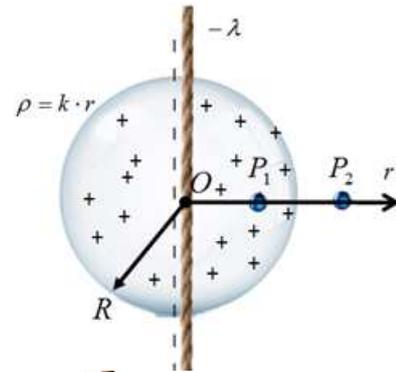
Affinchè il sistema sia in equilibrio termico è necessario che il calore ceduto dalla resistenza elettrica al sistema venga assorbito dalla massa di ghiaccio immessa ossia $Q_2 = Q_G$

Per cui $Q_2 = Q_G \Leftrightarrow \frac{f^2 R_2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} \tau = M_G (q_f + C T_A)$ da cui si calcola la **portata massica** di

$$\text{ghiaccio da immettere } \frac{M_G}{\tau} = \frac{f^2 R_2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2 (q_f + C T_A)} = 0.53 \text{ g/s}$$

che **in un minuto** corrispondono alla immissione di una massa $M_G = 32 \text{ g}$ di ghiaccio.

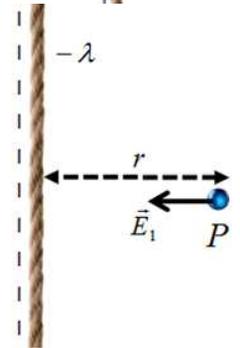
4. Una sfera di raggio $R=50\text{cm}$ e di centro O ha densità di carica positiva a simmetria radiale con legge $\rho=kr$ (ove $k=100\ \mu\text{C}/\text{m}^4$). Un filo rettilineo infinitamente lungo passante per O ha carica negativa con densità lineare uniforme $\lambda=10\ \mu\text{C}/\text{m}$. Determinare le posizioni dei punti P_1 e P_2 sull'asse radiale ed ortogonale al filo il campo elettrico complessivo si annulla.



4. Calcolo del campo elettrico generato dal filo rettilineo infinito:

Applicando la legge di Gauss si ricava facilmente che il campo elettrico generato da un filo rettilineo infinito uniformemente carico in un punto P a distanza r dal filo è in modulo $E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ diretto verso il filo

filo è in modulo $E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ diretto verso il filo



Calcolo del campo elettrico generato dalla sfera:

a) Punto interno ($r < R$)

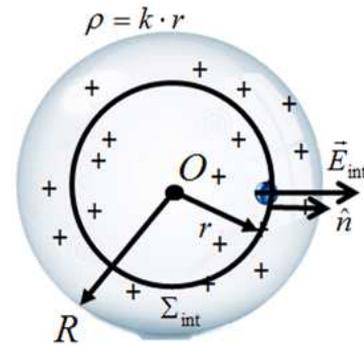
Applicando la legge di Gauss per un punto interno, il flusso uscente dalla superficie Σ_{int} vale $\Phi_{\Sigma_{\text{int}}} = \int_{\Sigma_{\text{int}}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_{\text{int}}(r) = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$, dove la carica

interna alla Σ_{int} è $Q_{\text{int}} = \int \rho dV = \int_0^r \rho(4\pi r'^2 dr') = 4\pi k \int_0^r r'^3 dr' = \pi k r^4$

Combinando si ricava il **campo interno** $E_{\text{int}} = \frac{kr^2}{4\epsilon_0}$ nel verso opposto al

campo E_1 prodotto dal filo. Il punto di equilibrio interno si trova uguagliando i due campi:

$$E_1 = E_{\text{int}} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \text{ da cui la posizione di } P_1 \text{ è } r = \sqrt[3]{\frac{2\lambda}{\pi k}} = 0.4 \text{ m} < R$$



b) Punto esterno ($r > R$)

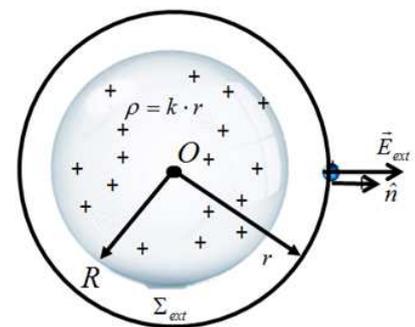
Applicando la legge di Gauss per un punto esterno, il flusso uscente dalla superficie Σ_{ext} vale $\Phi = \int_{\Sigma_{\text{ext}}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_{\text{ext}}(r) = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$, dove la carica

interna alla sfera è $Q_{\text{int}} = \int \rho dV = \int_0^R \rho(4\pi r'^2 dr') = 4\pi k \int_0^R r'^3 dr' = \pi k R^4$

Combinando si ricava il **campo esterno** $E_{\text{ext}} = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2}$ nel verso opposto al

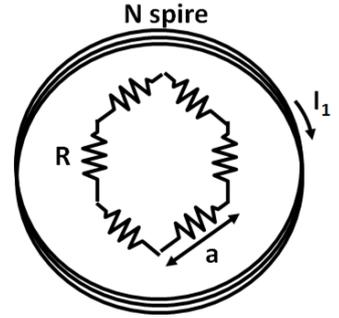
campo E_1 prodotto dal filo. Il punto di equilibrio interno si trova uguagliando i due campi:

$$E_1 = E_{\text{ext}} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \text{ da cui la posizione di } P_2 \text{ è } r = \frac{\pi k R^4}{2\lambda} = 0.98 \text{ m} > R$$



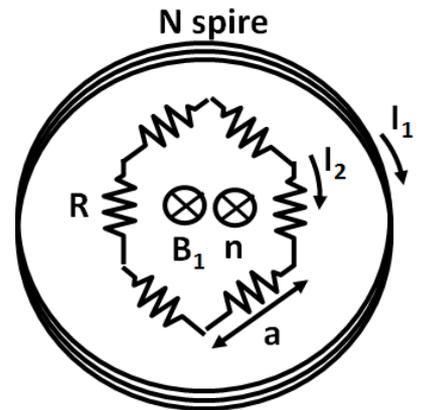
Entrambe le soluzioni sono quindi valide per P_1 e P_2 . Altri due punti di equilibrio speculari (non richiesti dal problema) si trovano per simmetria alle stesse distanze da O ma a sinistra del filo.

5. Un solenoide di elevata concentrazione di spire ($N=300$ spire, con una lunghezza del solenoide $L=50$ cm) è percorso dalla corrente variabile $I_1=I_0 \exp[-k \cdot t]$ nel verso indicato in figura. All'interno del solenoide è posta una spira metallica a forma di esagono regolare di lato $a=7$ cm con una resistenza elettrica $R=2\Omega$ per ciascun lato. Determinare l'espressione analitica della corrente elettrica indotta I_2 nella spira, e calcolare per quale valore della costante di tempo k il rapporto fra la corrente nel secondario I_2 e nel primario I_1 è fissata al 1%. [Si trascurino fenomeni di autoinduzione]



5. Il vettore induzione magnetica generato all'interno del solenoide percorso dalla corrente I_1 ha intensità uniforme pari a $B_1 = \mu_0 \frac{N}{L} I_1 = \frac{\mu_0 N I_0}{L} \exp(-kt)$

Per il calcolo del flusso concatenato nella spira esagonale occorre scegliere un verso di percorrenza della spira: per semplicità è scelto in modo che la normale alla spira \hat{n} abbia lo stesso verso di \vec{B}_1



Il flusso concatenato diviene quindi:

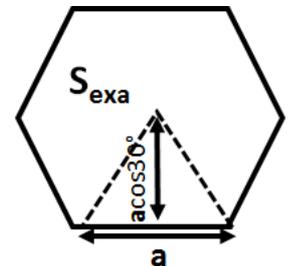
$$\Phi_c = \int \vec{B}_1 \cdot \hat{n} dS = \int B_1 dS = B_1 \cdot S_{\text{exa}} = \left(\frac{\mu_0 N I_0 \exp[-kt]}{L} \right) \left(6 \cdot \frac{a \cdot a \cos 30^\circ}{2} \right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\mu_0 N a^2 I_0}{L} \exp(-kt)$$

Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira

$$f_i = - \frac{d\Phi_c}{dt} = - \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\mu_0 N a^2}{L} I_0 \frac{d[\exp(-kt)]}{dt} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\mu_0 N a^2 k}{L} I_0 \exp(-kt)$$

e l'intensità di corrente indotta nel circuito $I_2 = \frac{f_i}{6R} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_0 N a^2 k}{L \cdot R} I_0 \exp(-kt)$

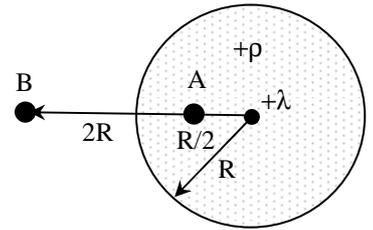


circolante nello stesso senso del solenoide (orario) e con la stessa legge esponenziale decrescente nel tempo. Il rapporto fra la corrente nel secondario e nel primario è quindi costante e vale

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\mu_0 N a^2 k}{L \cdot R} \quad \text{da cui il valore della costante di tempo } k = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{L \cdot R}{\mu_0 N a^2} \left(\frac{I_2}{I_1} \right) = 1.25 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$$

ESERCIZI SOSTITUTIVI INCORPORATI NELLA SECONDA PROVA DI ESONERO

1. Dato un cilindro indefinito di raggio $R=50\text{cm}$ uniformemente carico con densità volumetrica $\rho=50\mu\text{C}/\text{m}^3$ ed un filo concentrico anch'esso uniformemente carico con densità lineare $\lambda=10\mu\text{C}/\text{m}$ determinate la differenza di potenziale tra i punti A e B a distanza rispettivamente $R/2$ e $2R$ dal filo.



1. La differenza di potenziale fra i punti A e B può calcolarsi singolarmente sia per il cilindro indefinito che per il filo indefinito. I risultati vanno quindi sommati per la legge di sovrapposizione degli effetti.

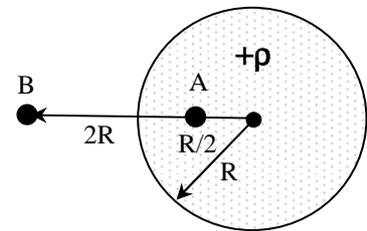
Calcolo di $V_A - V_B$ per il cilindro uniformemente carico

Per il calcolo del campo elettrico si applica la legge di Gauss. Il flusso del campo elettrico uscente da una superficie cilindrica concentrica di raggio generico r e di altezza h assume l'espressione

$$\Phi(\vec{E}_o) = \int_{\Sigma} \vec{E}_o \cdot \hat{n}_{ext} dS = (2\pi r h) E_o = Q_{int} / \epsilon_o$$

$$\text{dove } Q_{int} = \begin{cases} r < R & = \rho(\pi r^2 h) \\ r > R & = \rho(\pi R^2 h) \end{cases}$$

$$\text{da cui il campo elettrico } \begin{cases} r < R & E_{int} = \rho r / 2\epsilon_o \\ r > R & E_{ext} = \rho R^2 / 2\epsilon_o r \end{cases}$$



la differenza di potenziale vale quindi ove si è assunto nullo il potenziale all'infinito. La differenza di potenziale fra i punti B ed A assume quindi il valore

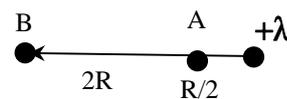
$$V_A - V_B = \int_{R/2}^R E_{int} dr + \int_R^{2R} E_{ext} dr = \frac{\rho}{2\epsilon_o} \int_{R/2}^R r dr + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_o} \int_R^{2R} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\epsilon_o} \frac{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_o} \ln\left(\frac{2R}{R}\right) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_o} \left[\frac{3}{8} + \ln(2) \right]$$

$$(V_A - V_B)_{cil} = 7.55 \cdot 10^5 \text{ V}$$

Calcolo di $V_A - V_B$ per il filo uniformemente carico

Il campo elettrico di un filo uniformemente carico è $E_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o r}$

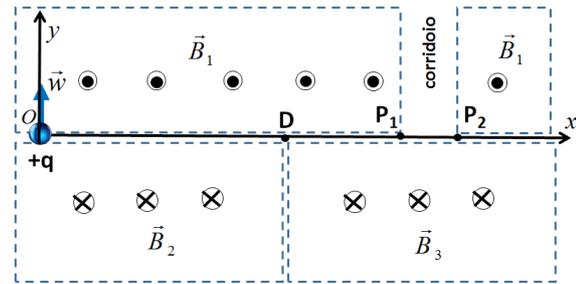
$$(V_A - V_B)_{filo} = \int_{R/2}^{2R} E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \int_{R/2}^{2R} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln 4 = 2.495 \cdot 10^5 \text{ V}$$



Applicando la legge di sovrapposizione degli effetti si ottiene

$$V_A - V_B = (V_A - V_B)_{cil} + (V_A - V_B)_{filo} = \frac{1}{2\epsilon_o} \left\{ \frac{\lambda}{\pi} \ln 4 + \rho R^2 \left[\frac{3}{8} + \ln(2) \right] \right\} = 1.005 \cdot 10^6 \text{ V}$$

4. Una carica $q=10\mu\text{C}$ di massa $m=1\text{mg}$, entra con velocità $w=1\text{m/s}$ (lungo y) in una regione dello spazio dove è presente un campo di induzione magnetica uniforme $B_1=0.4\text{T}$ (lungo z) come indicato in figura. La carica si incurva e per effetto del solo campo di induzione magnetica transita anche in varie zone dove sono presenti i campi uniformi $B_2=0.5\text{T}$, ancora $B_1=0.4\text{T}$, ed infine B_3 , per poi finalmente fuoriuscire lungo il corridoio tra P_1 e P_2 (lungo y) dove è assente il campo magnetico. Calcolare i valori minimi e massimi di B_3 affinché la particella centri il corridoio [Dati: $OD=1\text{m}$, $OP_1=1.5\text{m}$, $OP_2=1.8\text{m}$]. **Facoltativo:** determinare il tempo per raggiungere P_1



4. Nelle zone dove è presente l'induzione magnetica la carica percorre una traiettoria circolare per effetto della forza di Lorentz

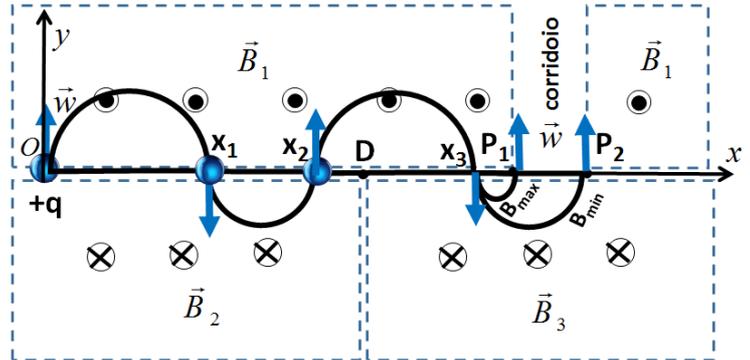
$$qwB = m \frac{w^2}{R} \quad \text{da cui} \quad R = \frac{mw}{qB}$$

ove R è il raggio della circonferenza

Il moto è circolare uniforme poiché la forza di

Lorentz non compie lavoro e l'energia cinetica della carica rimane costante. Tuttavia a causa della geometria del sistema la carica riesce a percorrere solo metà circonferenza (**in senso orario**) prima di entrare nella zona sottostante. Essa percorre quindi la semicirconferenza di lunghezza πR alla

velocità uniforme w in un **tempo** $t = \frac{\pi R}{w} = \frac{\pi m}{qB}$.



La carica attraversa l'asse delle x nella posizione $x_1 = 2R_1 = 2 \frac{mw}{qB_1} = \mathbf{0.5 \text{ m}}$ ed entra nella 2^a zona

con la medesima velocità w in senso opposto all'asse y , venendo incurvata in modo da percorrere una nuova semicirconferenza (**stavolta in senso antiorario**) e da attraversare nuovamente l'asse x

nel punto $x_2 = x_1 + 2R_2 = 2 \frac{mw}{q} \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right) = \mathbf{0.9 \text{ m}}$ (prima di D)

Rientrata nella zona ad induzione magnetica B_1 sempre con velocità w (lungo y) percorre ancora una semicirconferenza (**in senso orario**) attraversando nuovamente l'asse nel punto

$x_3 = x_2 + 2R_1 = 2 \frac{mw}{q} \left(\frac{2}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right) = \mathbf{1.4 \text{ m}}$

Entra infine nella regione dove è presente l'induzione magnetica B_3 e percorre l'ultima semicirconferenza in modo da fuoriuscire nel corridoio con moto rettilineo uniforme.

Per centrare il corridoio è necessario che $OP_1 \leq x_3 + 2 \frac{mw}{qB_3} \leq OP_2$

da cui si ricavano i valori di **induzione magnetica minima e massima:**

$$B_{\min} \leq B_3 \leq B_{\max} \quad \text{dove} \quad B_{\min} = \frac{2mw}{q(OP_2 - x_3)} = \mathbf{0.5 \text{ T}} \quad \text{ed} \quad B_{\max} = \frac{2mw}{q(OP_1 - x_3)} = \mathbf{2 \text{ T}}$$

Facoltativo: determinato il singolo tempo di percorrenza di una semicirconferenza $t = \frac{\pi R}{w} = \frac{\pi m}{qB}$, il

tempo necessario per arrivare in P_1 è quindi $t_{\text{tot}} = \frac{\pi m}{q} \left(\frac{2}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \frac{1}{B_{3\max}} \right) = \mathbf{2.36 \text{ s}}$