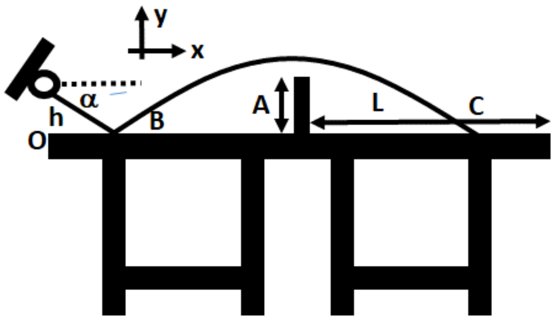
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2019-2020
Ingegneria Gestionale – Gruppi **A** e **B**
1°appello del 19 Giugno 2020

1. Giocando a tennis da tavolo un ragazzo fa una battuta colpendo una palla di massa **m=2.7g** dando un impulso **I= 0.03 kgm/s** diretto verso il basso con un angolo **α=10°** al di sotto dell'orizzontale. La palla colpita ad altezza **h=5cm** sopra il bordo O del tavolo rimbalza elasticamente una volta nel proprio campo per poi superare la rete (**A=15.25cm**) e ricadere una seconda volta all'interno del campo avversario (**L=274 cm**). Il moto avviene interamente nel piano xy. Determinare la posizione dei punti di rimbalzo B e C e verificare a che quota transita sopra la rete.



1. Soluzione

Fase a). Equazioni della cinematica prima del primo rimbalzo

Lungo x) $\begin{cases} x(t) = v_o \cos(\alpha)\cdot t \\ v_x = v_o \cos(\alpha) \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo y) $\begin{cases} y(t) = h - v_o \sin(\alpha)\cdot t - g\cdot t^2/2 \\ v_y(t) = -v_o \sin(\alpha) - g\cdot t \\ a_y = -g \end{cases}$

Tempo di volo t_B: imponendo y=0 si ottiene $t_B = \dfrac{-v_o \sin\alpha + \sqrt{v_o^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}$ **=24 ms**

Ascissa del punto di impatto B: $x_B = v_o \cos(\alpha)\cdot t_B$ **= 27 cm**

Velocità di impatto in B : $\begin{cases} v_x = v_o \cos\alpha = 10.9\, m/s \\ v_y = -\sqrt{v_o^2 \sin^2\alpha + 2gh} = -2..17\, m/s \end{cases}$

Fase b) Equazioni della cinematica dopo il primo rimbalzo in B

Velocità dopo il rimbalzo in B $\begin{cases} v_{B,x} = v_x = 10.9\, m/s \\ v_{B,y} = -v_y = 2.17\, m/s \end{cases}$

Nell'urto elastico con il tavolo si inverte la componente verticale della velocità

Moti componenti dopo il primo rimbalzo in B (*il tempo è riazzerato*)

Lungo x) $\begin{cases} x(t) = x_B + v_{B,x}\cdot t \\ v_x = v_{B,x} \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo y) $\begin{cases} y(t) = v_{B,y}\cdot t - g\cdot t^2/2 \\ v_y(t) = v_{B,y} - g\cdot t \\ a_y = -g \end{cases}$

Nuovo tempo di volo: imponendo y=0 si ottiene il tempo di arrivo in C $t_C = 2v_{B,y}/g$ **= 0.44 s**

L'ascissa del punto di impatto C: $x_C = x_B + 2v_{B,x}v_{B,y}/g$ **=5.11 m**

(*entro la lunghezza del tavolo 2L=548 cm***)**

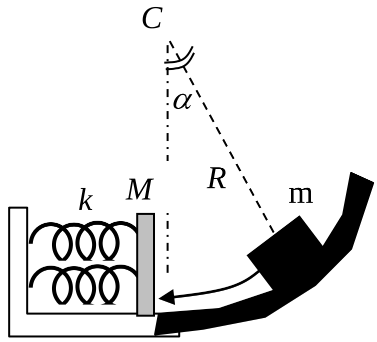
Verifica di transito sopra la rete

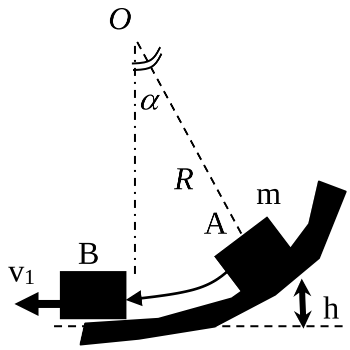
Dalla equazione $x(t) = x_B + v_{B,x} \cdot t$ si calcola il tempo richiesto affinché la pallina sorvoli la rete

Imponendo x=L si ottiene il tempo $t^* = \dfrac{L - x_B}{v_{B,x}} = 0.226$ s.

Noto il tempo t* si può calcolare la quota di sorvolo $y(t^*) = v_{B,y} \cdot t - g \cdot t^2 / 2 =$ **24 cm** superiore di quasi 9 cm rispetto alla altezza della rete A=**15.25 cm**

2. Un blocco di massa m=2kg, è a riposo su una ciotola cilindrica liscia di raggio R=5m in un punto con una inclinazione di un angolo α=10° come in figura. Quando viene lasciato libero esso scivola lungo la ciotola, raggiunge la posizione orizzontale impattando elasticamente contro un piattello di massa M=8kg collegato con due molle uguali di costante k ad una parete verticale. Sapendo che a seguito dell'urto il blocco m torna indietro risalendo sulla ciotola, determinare l'inclinazione massima β raggiunta. Successivamente il blocco m ridiscende ed urta nuovamente il piattello nella stessa posizione del primo urto (*ciò accade perché il periodo di oscillazione del piattello M coincide con il periodo di oscillazione del blocco m nella ciotola*). Determinare in queste condizioni la massima compressione del piattello sia dopo il primo urto che dopo il secondo urto.





2. Soluzione. **Calcolo delle velocità prima dell'urto**

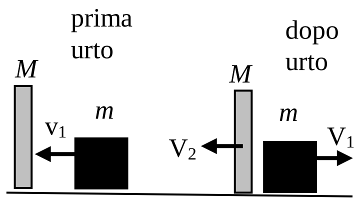
Durante la discesa prima dell'urto si conserva l'energia meccanica:

$$E_{mA} = E_{mB} \Rightarrow mgR(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)} = \mathbf{1.22\ m/s}$$

Primo urto

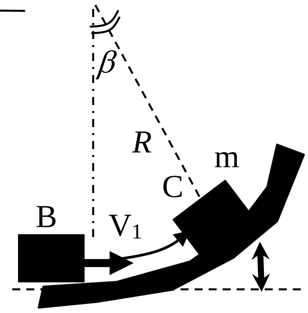
Applicando la conservazione della q.d.m. e dell'energia si trovano le **velocità successive all'urto** dei due blocchi esprimibili in funzione delle velocità di impatto v_1 del blocco m

$$\begin{cases} V_1 = \left(\dfrac{m-M}{m+M}\right) v = -0.6 v_1 = -0.732\, m/s \\ V_2 = \left(\dfrac{2m}{m+M}\right) v_1 = 0.4 v_1 = 0.488\, m/s \end{cases}$$

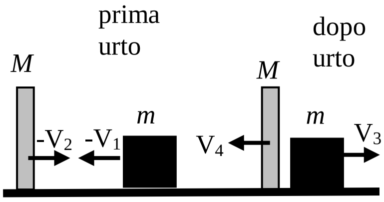


Risalita. dopo l'urto si conserva ancora l'energia meccanica della massa m:

$$E_{mB} = E_{mC} \Rightarrow \frac{1}{2} m V_1^2 = mgR(1-\cos\beta) \Rightarrow \beta = ar\cos\left(1 - \frac{V_1^2}{2gR}\right) = \mathbf{6°}$$



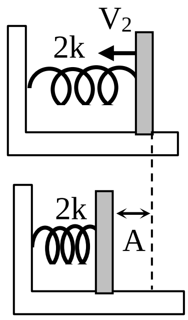
Secondo urto
Applicando la conservazione della q.d.m. e dell'energia analogamente al primo urto si ottengono le nuove velocità V_3 di m e V_4 di M a partire dalla velocità V_1 e V_2 invertite



$$\begin{cases} V_3 = \left(\dfrac{m-M}{m+M}\right)(-V_1) + \left(\dfrac{2M}{m+M}\right)(-V_2) = -\left[\left(\dfrac{m-M}{m+M}\right)^2 + \left(\dfrac{2M}{m+M}\right)\left(\dfrac{2m}{m+M}\right)\right]v_1 = -v_1 \\ V_4 = \left(\dfrac{2m}{m+M}\right)(-V_1) + \left(\dfrac{M-m}{m+M}\right)(-V_2) = -\left[\left(\dfrac{2m}{m+M}\right)\left(\dfrac{m-M}{m+M}\right) + \left(\dfrac{M-m}{m+M}\right)\left(\dfrac{2m}{m+M}\right)\right]v_1 = 0 \end{cases}$$

Il risultato è che a causa dei due fenomeni oscillatori l'inversione delle velocità V_1 e V_2 inverte le condizioni dell'urto e conseguentemente il blocco m ritornerà ad avere la velocità che aveva inizialmente v_1 ma invertita, mentre il piattello tornerà fermo nella sua posizione di equilibrio.

Compressione delle molle
La costante elastica delle molle si ottiene uguagliando i peridi di oscillazione del piattello M e del blocco m: $2\pi\sqrt{\dfrac{M}{2k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ da cui $k = \dfrac{gM}{2R} =$ **7.84 N**

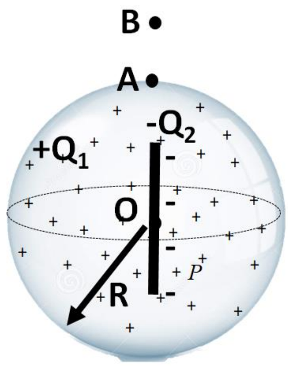


Inoltre dopo il primo urto le molle si comprimono di una quantità A che si ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica
$\dfrac{1}{2}MV_2^2 = \dfrac{1}{2}(2k)A^2$ (la costante elastica equivalente delle due molle è 2k)

dalla quale la **massima compressione** $A = \sqrt{\dfrac{M}{2k}}V_2 = \sqrt{\dfrac{R}{g}}V_2$ **= 34.9 cm**

Dopo il secondo urto invece ovviamente l'oscillazione cessa.

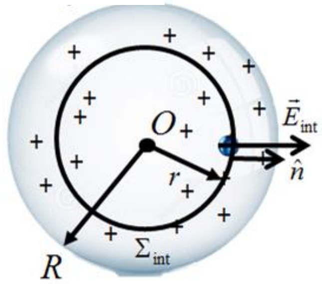
3. Una carica Q_1=10μC è distribuita uniformemente all'interno di una sfera di raggio R=50cm e di centro O. Una seconda carica negativa $-Q_2$ è distribuita uniformemente lungo un segmento rettilineo di lunghezza R posizionato all'interno della sfera con baricentro nell'origine O. Sapendo che il campo elettrico lungo la linea equatoriale in figura è nullo, determinare il campo elettrico sul polo della sfera A, e determinare il punto B lungo l'asse per il polo (a distanza y da O) dove il campo si annulla.



3. Soluzione. Calcolo del campo elettrico generato dalla sfera E_1:

a) Punto interno (r<R)
Applicando la legge di Gauss per un punto interno, il flusso uscente dalla superficie Σ_{int} vale $\Phi_{\Sigma int} = \int_{\Sigma int} \vec{E} \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_{int}(r)$=$Q_{int}/\varepsilon_o$,

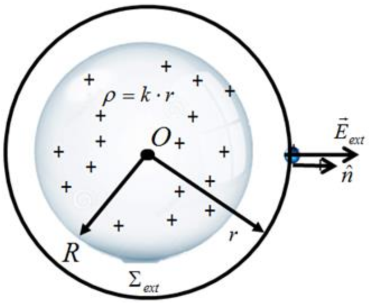
dove la carica interna alla Σ_{int} è



$$Q_{\text{int}} = \int \rho dV = \int_0^r \rho\left(4\pi r^2 dr\right) = 4\pi\rho\int_0^r r^2 dr = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Combinando si ricava il **campo interno** $E_{\text{int},1} = \rho\frac{r}{3\varepsilon_o} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^3}$

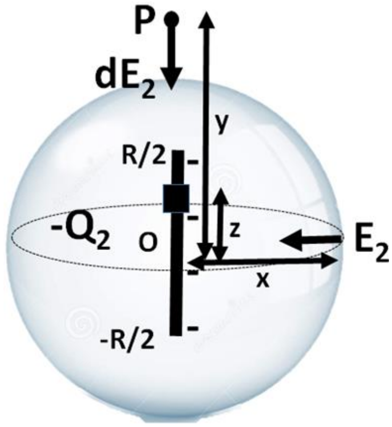
b) Punto esterno (r>R)



Applicando la legge di Gauss per un punto esterno, il flusso uscente dalla superficie Σ_{ext} vale $\Phi = \int_{\Sigma ext} \vec{E} \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_{ext}(r)$=$Q_{int}/\varepsilon_o$, dove la carica interna alla sfera è $Q_{\text{int}} = \int \rho dV = Q_1$

Combinando si ricava il **campo esterno** $E_{ext,1} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o r^2}$

Calcolo del campo elettrico generato dal segmento rettilineo:



Sulla circonferenza equatoriale il campo elettrico si può calcolare a partire da un risultato del campo elettrico lungo la mediana di un filo di lunghezza 2L=R

$$E_2(x) = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o x}\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}} = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R}\frac{R/2}{\sqrt{(R/2)^2+R^2}} = \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\sqrt{5}R^2}$$

Sull'asse verticale y invece si ottiene integrando tutti i contributi

Alla distanza generica *z* dall'origine *O* si trova la carica $dq=\lambda_2 dz$ che genera il contributo di campo elettrico $dE_1 = \lambda_2 dz / 4\pi\varepsilon_o (y-z)^2$ nel punto *P* a distanza *y* dall'origine. Tale contributo diretto lungo l'asse *y* quando integrato lungo tutto il semiasse positivo delle *x* fornisce un valore complessivo di campo elettrico pari a

$$E_2(y) = \int dE_2 = \frac{\lambda_2}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-R/2}^{R/2}\frac{dz}{(y-z)^2} = \frac{\lambda_2}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{y-z}\right] = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{y^2-(R/2)^2}$$ (diretto verso l'interno)

Imponendo che il campo nullo sulla linea equatoriale si ha : $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_o}\frac{1}{\sqrt{5}R^2}$

da cui la carica negativa sul segmento è in valore assoluto $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}Q_1 =$ **11.2 μC**

Il **campo elettrico nel polo A** si calcola con $E_A = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R^2} - E_2(R) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R^2} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4}{3R^2}$

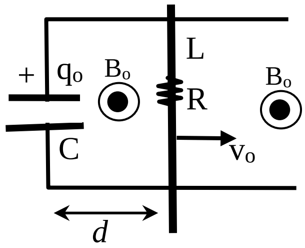
$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R^2}\left(1-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right) =$$ **-1.77·10⁵ V/m**

La posizione del **punto B** sull'asse y si troverebbe equilibrando due contributi di campo elettrico di segno opposto

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o y^2} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{y^2-(R/2)^2} = 0$$ da cui però $y = \sqrt{-\frac{Q_1}{Q_2-Q_1}}\left(\frac{R}{2}\right)$ con soluzioni immaginarie.

Il punto B con queste proprietà quindi non esiste sull'asse.

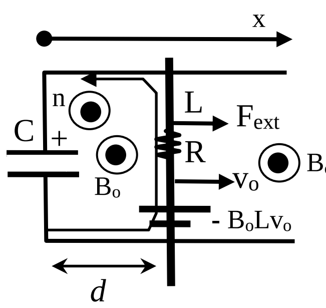
4. Una barretta metallica di lunghezza L=10cm è libera di spostarsi lungo una guida metallica giacente su un piano orizzontale in modo da formare un circuito elettrico di forma rettangolare con resistenza R=5Ω , chiusa su un condensatore di capacità C=50μF con carica iniziale q_o=20μC. Nella regione piana è presente un vettore induzione magnetica uniforme verticale di induzione B_o=1T. Assumendo di muovere la barretta, inizialmente posizionata in x_o=d=10cm, di moto rettilineo uniforme con velocità v_o=5m/s lungo l'asse x determinare la legge di carica del condensatore. Calcolare dopo quanto tempo la carica sul condensatore si azzera. Calcolare la corrente elettrica iniziale. Calcolare infine il lavoro che è necessario fare con una forza esterna per mantenere la barretta sempre alla velocità v_o.



4. Soluzione. Dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$,

si calcola il flusso concatenato con la spira Φ_c:

$$\Phi_c = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int B dS = B_o \int_0^x dx \int_0^L dy = B_o L \cdot x(t)$$



Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -B_o L \cdot v_o$ che è negativa (la corrente tende quindi a circolare quindi in senso inverso)

Oltre alla forza elettromotrice indotta è anche presente un condensatore con una carica iniziale q_o.

L'equazione della maglia è $i(t)R + \frac{q(t)}{C} = -B_o L v_o$ con soluzione $q(t) = -B_o L v_o C + A\exp(-t/RC)$

dove imponendo q(t)=q_o in t=0 si ottiene la **legge di carica del condensatore**

$$q(t) = -B_o L v_o C + (q_o + B_o L v_o C)\exp(-t/RC)$$

Il tempo di azzeramento della carica: $t = RC \cdot \ln\left(1 + \frac{q_o}{B_o L v_o C}\right) =$ **0.147 ms**

La **corrente nel circuito** vale $i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_o + B_o L v_o C}{RC}\exp(-t/RC)$

con valore della corrente iniziale $i_o = -\frac{q_o + B_o L v_o C}{RC} =$ **180 mA**

(il segno meno indica che la corrente circola in senso opposto a quello indicato in figura)

La forza esterna applicata è uguale ed opposta alla forza magnetica frenante per mantenere la barretta in moto rettilineo uniforme $F_{ext} = iLB_o = \frac{(q_o + B_o L v_o C)B_o L}{RC}\exp(-t/RC)$

che si affievolisce nel tempo compiendo complessivamente il lavoro esterno dato dalla formula

$$\int F_{ext} ds = \int_0^\infty F_{ext} v_o dt = \frac{(q_o + B_o L v_o C)B_o L v_o}{RC}\int_0^\infty \exp(-t/RC)dt = (q_o + B_o L v_o C)B_o L v_o = \mathbf{2.25\ 10^{-5}\ N}$$