Università di Roma "La Sapienza"

Facoltà di Ingegneria

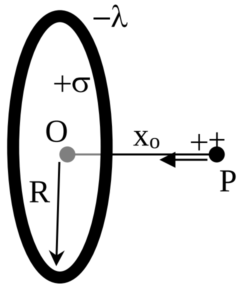
A.A. 2024-2025

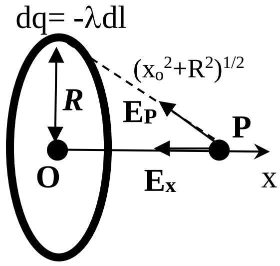
Ingegneria Gestionale (M-Z)

Soluzione I Appello del 20 Giugno 2025 – 1 Turno

Secondo Esonero

1. Testo. Un disco di materiale isolante di raggio R=30 cm risulta carico con densità superficiale uniforme $+\sigma= 50\mu C/m^2$. Sul bordo esterno del disco è distribuita uniformemente una carica lineare di segno opposto $-\lambda$. Sapendo che sull'asse del disco c'è una sferetta di carica + q=2μC, di massa m=50g che non subisce alcuna forza elettrica quando posizionata in un punto *P* distante x_o=40 cm dal centro O, determinare il valore della densità lineare λ. Calcolare inoltre quale velocità iniziale deve essere fornita alla sferetta nel punto P affinché essa possa giungere nel punto O.

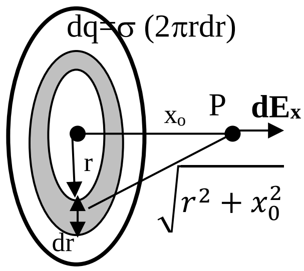




1. Soluzione. Campo elettrico prodotto da un anello uniformemente carico.
Il campo elettrico E_P prodotto dalla carica dq disposta su un elemento dell'anello

$dE_B^{(1)} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o(x_0^2+R^2)}$ che ha proiezione utile $dE_x^{(1)} = \frac{dq\cdot x_0}{4\pi\varepsilon_o(x_0^2+R^2)^{3/2}}$

Integrando tutti i contributi si ottiene il campo complessivo $E_x^{(1)} = \frac{-\lambda\cdot x_0\cdot R}{2\varepsilon_o(x_0^2+R^2)^{3/2}}$
(il segno meno indica che il campo elettrico è diretto verso il centro O)



Campo elettrico prodotto da un disco uniformemente carico.

Il campo elettrico prodotto da un anello infinitesimo di raggio *r* e spessore *dr* sul quale è disposta la carica dq=σ(2πrdr) è dato dalla formula

$dE_x^{(2)} = \frac{dq\cdot x_0}{4\pi\varepsilon_o(x_0^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma\cdot x_0\cdot r\cdot dr}{2\varepsilon_o(x_0^2+r^2)^{3/2}}$ che deve essere integrato su tutto il disco

$$E_x^{(2)} = \int_0^R dE_x^{(2)} = \int_0^R \frac{\sigma\cdot x_0\cdot r\cdot dr}{2\varepsilon_o(x_0^2+r^2)^{3/2}} = \frac{+\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1-\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+R^2}}\right]$$

Imponendo l'annullamento del campo complessivo in P ($x=x_o$) si ottiene la relazione

$\frac{\lambda\cdot x_0\cdot R}{2\varepsilon_o(x_0^2+R^2)^{3/2}} = \frac{+\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1-\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+R^2}}\right]$ da cui si ricava

la **densità lineica di carica** $\lambda = \sigma\left[\frac{(x_0^2+R^2)^{3/2}}{x_0\cdot R}-\frac{x_0^2+R^2}{R}\right]$= **10.4 μC/m**

La **differenza di potenziale** V_0-V_P dovuta al solo anello negativo vale

$V_O^{(1)} - V_P^{(1)} = \int_0^{x_0} E_x^{(1)}dx = \int_0^{x_0}\frac{-\lambda\cdot x\cdot R}{2\varepsilon_o(x^2+R^2)^{3/2}}dx = \frac{-\lambda}{2\varepsilon_o}\left[1-\frac{R}{\sqrt{x_0^2+R^2}}\right]$= **- 2.36·10⁵ V**

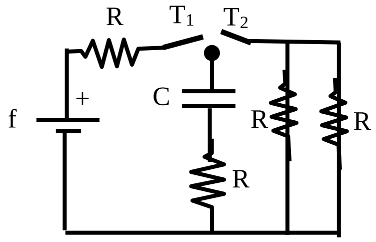
La differenza di potenziale dovuta al solo disco positivo vale

$$V_O^{(2)} - V_P^{(2)} = \int_0^{x_0} E_x^{(2)} dx = \int_0^{x_0} \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right] dx = \frac{+\sigma}{2\varepsilon_o}\left[x_0 + R - \sqrt{x_0^2 + R^2}\right] = \mathbf{5.66 \cdot 10^5\ V}$$

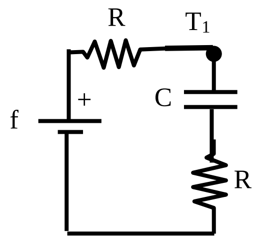
La **differenza di potenziale** V_0-V_P dovuta ad entrambe le distribuzioni vale $V_O^{tot} - V_P^{tot}$ = **$3.3 \cdot 10^5$ V**

La **velocità di lancio nel punto P** si ottiene imponendo la conservazione dell'energia nei punti P e O $E_P = E_0$ ossia $\frac{1}{2} m w_P^2 + qV_P^{tot} = qV_0^{tot}$ da cui la velocità $w_p = \sqrt{\frac{2q}{m}(V_O^{tot} - V_P^{tot})}$ =**5.14 m/s**

2. Testo. Sul condensatore C è inizialmente presente una carica q_o=2μC. Nell'istante t=0 viene chiuso il solo tasto T_1 in modo che il condensatore possa ulteriormente caricarsi tramite la forza elettromotrice f=10V. Dopo un tempo t_1=10 ms vengono azionati contemporaneamente gli interruttori T_1 (da chiuso ad aperto) e T_2 (da aperto a chiuso) così da poter scaricare il condensatore sulla rete di resistenze a destra in figura. Determinare quanto tempo occorre affinché il condensatore ritorni al livello di partenza q_o. [**Dati**: R=20 kΩ, C=1μF]



2. Soluzione. Processo di carica



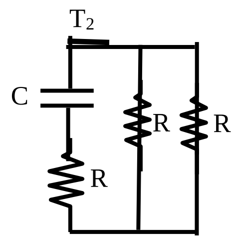
La resistenza di maglia è $R_{tot1} = R + R = 2R$ =40 kΩ
Il tempo caratteristico di carica $\tau_1 = R_{tot1} C =$ **40 ms**

La carica ai capi del condensatore dopo Δt_1 è data dalla sovrapposizione contemporanea di un processo di carica dovuto alla forza elettromotrice f e da quello di scarica della carica preesistente

$$q(\Delta t_1) = q_o \exp(-\Delta t_1/\tau_1) + fC[1 - \exp(-\Delta t_1/\tau_1)] = \mathbf{3.77\ \mu C}$$

Processo di scarica

La resistenza di maglia è ora $R_{tot2} = R||R + R = \frac{R}{2} + R$ =**30** kΩ
Il tempo di scarica $\tau_2 = R_{tot2} C$ =**30 ms**

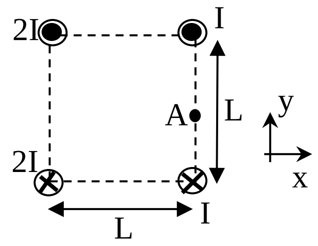


A partire dal nuovo tempo t>0, ai capi del condensatore si registra un processo di scarica della carica pre-esistente $q(t) = q(\Delta t_1)\exp[-t/\tau_2]$

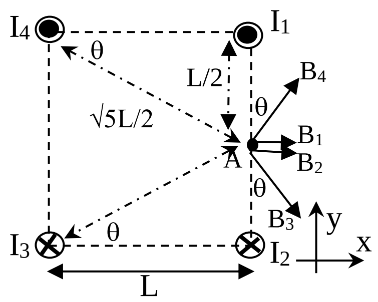
Imponendo $q(\Delta t_2) = q_o$ si ottiene $\Delta t_2 = \tau_2 \ln\left(\frac{q(\Delta t_1)}{q_o}\right) =$ **19 ms**

(ossia **29 ms** dopo la prima chiusura di T_1)

3. Testo. Quattro fili indefiniti percorsi da corrente sono posti ai vertici di un quadrato di lato L come indicato in figura. Si calcolino le componenti lungo gli assi *x,y* del vettore induzione magnetica presente nel punto A che si trova a metà di un lato del quadrato. [Dati: I=4mA, L=10cm]



3. Soluzione.
I vettori induzione magnetica generati nel punto A dai due fili I_1 e I_2 hanno entrambi direzioni lungo l'asse *x*



lungo x $\quad B_1 = B_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi(L/2)} = \frac{\mu_o I}{\pi L}$ $\quad$ **(**dove $I_1=I_2=I$**)**

I vettori induzione magnetica generati nel punto A dai due fili I_3 e I_4 hanno risultante lungo l'asse x. Quindi vanno considerate le due componenti efficaci lungo l'asse x

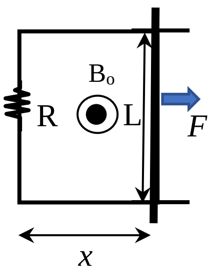
lungo x $\quad B_{3,x} = B_{4,x} = \frac{\mu_o(2I)}{2\pi(\sqrt{5}L/2)} sin\theta = \frac{\mu_o(2I)}{2\pi(\sqrt{5}L/2)} \frac{L/2}{\sqrt{5}L/2} = \frac{2}{5}\frac{\mu_o I}{\pi L}$

(dove $I_3=I_4=2I$, θ=arctan(0.5)=26°24' con $\sin\theta=1/\sqrt{5}$**)**

Quindi il campo totale sarà solo diretto lungo l'asse x

$$B_{tot} = B_1 + B_2 + B_{3,x} + B_{4,x} = \frac{\mu_o I}{\pi L}\left(1 + 1 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{14}{5}\frac{\mu_o I}{\pi L} = 45nT$$

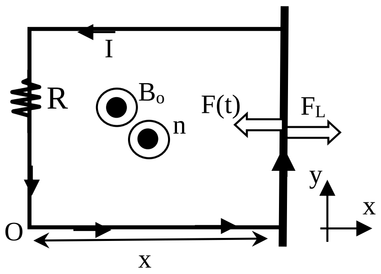
4. Testo. Una barretta metallica di massa m=10g è libera di spostarsi orizzontalmente lungo una guida metallica in modo da formare un circuito elettrico con R=2Ω di forma rettangolare di lati L ed x con x(t) variabile ed L=1m. Il circuito giace in una regione piana dove è applicato un vettore induzione magnetica uniforme (con verso uscente dal foglio) variabile nel tempo con legge $B_o(t)=B_{max}$*exp(-m*t) (con B_{max}=1T, m=0.1 s^{-1}). La barra viene posizionata con velocità nulla nella posizione con x_o=50 cm.
Determinare l'espressione della forza F(t) che occorre applicare sul lato mobile affinché la barretta rimanga ferma calcolando il valore numerico del massimo di tale forza.
Determinare inoltre l'espressione della corrente elettrica i(t) circolante calcolando il valore numerico del massimo di tale corrente. Determinare infine l'energia dissipata dalla resistenza elettrica per tutto il tempo.



4. Soluzione.

L'orientazione della corrente circolante nella spira (antioraria) è scelta in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia stessa direzione e verso di $\vec{B}$. Quindi il **flusso concatenato** con la spira Φ_c è

$$\Phi_c = \iint \vec{B}\cdot\hat{n}dxdy = B_o(t)\int_0^{x(t)}dx\int_0^{L}dy = B_o(t)\cdot L\cdot x(t)$$



Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola

la **forza elettromotrice indotta** nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{d}{dt}[B_{max}exp(-mt)\cdot L\cdot x(t)] = -B_{max}L[v_x - m\cdot x]exp(-mt)$$

Poichè però la barretta non si muove (v_x=0) in virtù dell'applicazione di una forza esterna F(t) che controbilancia la forza magnetica F_L,

la **f.e.m. indotta** diviene $f_i = B_{max}\cdot L\cdot m\cdot x\cdot exp(-mt)$ che ha valore massimo **50 mV** in t=0

l'**intensità di corrente indotta** nel circuito $I = \frac{f_i}{R} = \frac{B_{max}\cdot L\cdot m\cdot x}{R}exp(-mt)$ che ha valore massimo

I_{max}=25 mA in t=0

La **forza magnetica** agente sulla barra $\vec{F}_L = I\int d\vec{l}\times\vec{B}_o$ ed è contrastata dalla forza esterna *F(t)* (diretta come in figura) di intensità $F(t) = F_L = ILB_0 = \left(\frac{B_{max}^2L^2m\cdot x}{R}\right)\cdot exp(-2mt)$

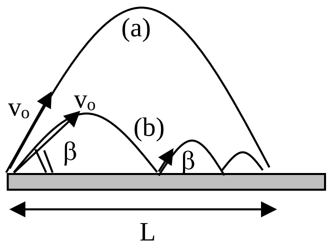
che parte dal valore massimo iniziale in *t=0* $F_{max} = F(0) = \frac{B_{max}^2L^2m\cdot x}{R} =$ **0.025 N**

La **potenza dissipata sulla resistenza** è $P_R = I^2R = \frac{(B_{max}\cdot L\cdot m\cdot x)^2}{R}exp(-2mt)$

L'energia dissipata è $E_R = \int_0^\infty P_R dt = \frac{(B_{max}\cdot L\cdot m\cdot x)^2}{R}\int_0^\infty exp(-2mt)dt = \frac{(B_{max}\cdot L\cdot x)^2 m}{2R}$ =**6.25 mJ**

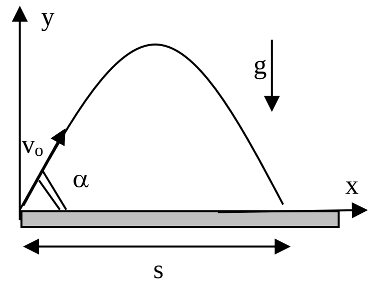
Esercizi di Meccanica sostitutivi per la prova scritta dell'esame completo

1. Testo. Durante una partita di baseball, per fare arrivare la palla in base alla distanza L, un giocatore invece di lanciare la palla con velocità v_o=20m/s e con una inclinazione di 60° (curva a), decide di lanciare la palla sempre con v_o ma facendola rimbalzare due volta sul terreno nella convinzione che arrivi prima (curva b). Supponendo che dopo ogni rimbalzo la palla mantenga lo stesso angolo β di lancio ma che dopo aver toccato terra perda la metà della sua velocità, determinare l'angolo di lancio β ed il tempo guadagnato con questa operazione.



1. Soluzione

La traiettoria parabolica di un proiettile lanciato con velocità iniziale v_o ed alzo α si scompone nei due moti componenti lungo x ed y



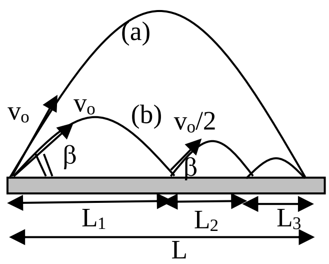
lungo x $\begin{cases} x(t) = v_o t\cos\alpha \\ v_x = v_o\cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo y $\begin{cases} y(t) = v_o t\sin\alpha - gt^2/2 \\ v_y = v_o\sin\alpha - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

il tempo di volo si ottiene imponendo y(t)=0 da cui $t = \frac{2v_o\sin\alpha}{g}$

mentre la gittata è data da $s = x(t) = v_o\cos\alpha\left(\frac{2v_o\sin\alpha}{g}\right) = \frac{v_o^2\sin(2\alpha)}{g}$

a) lungo la curva (a) (α=60°) si calcola $L = \frac{v_O^2}{g}sin(2\alpha) = \mathbf{35.3\ m}$

ed il tempo di volo $t_a = \frac{2v_O\,sin(\alpha)}{g}$ =**3.53 s**



b) lungo la curva (b)

$L = L_1 + L_2 + L_3 = \frac{\left[v_O^2+\left(\frac{v_O}{2}\right)^2+\left(\frac{v_O}{4}\right)^2\right]sin(2\beta)}{g} = \frac{21}{16}\frac{v_O^2\,sin(2\beta)}{g}$

mentre il tempo complessivo $t_b = \frac{2v_O\,sin\,\beta}{g} + \frac{v_O\,sin\,\beta}{g} + \frac{v_O\,sin\,\beta}{2g} = \frac{7v_O}{2g}sin\,\beta$ =**2.518 s**

Imponendo che i due percorsi (a) e (b) si ricongiungano a distanza L si ottiene

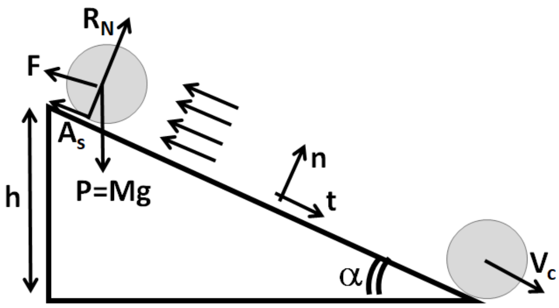
$\frac{21}{16}\frac{v_O^2\,sin(2\beta)}{g} = \frac{v_O^2\,sin(2\alpha)}{g}$ da cui **l'angolo di lancio** $\beta = \frac{arcsin\left(\frac{16}{21}sin(2\alpha)\right)}{2}$ =0.36 rad = **20° 38'**

ed il tempo guadagnato $\Delta t = t_a - t_b$ =**1.017 s**

2. Testo. Un cilindro di massa M=1kg si trova inizialmente fermo sulla sommità di un piano inclinato di α=15° rispetto all'orizzontale. Il cilindro inizia a rotolare a valle senza strisciare. Per tutta la durata del moto di rotolamento il cilindro subisce un vento contrario schematizzato con una forza costante F= 0.65 N contraria al moto e applicata nel centro di massa del cilindro. Si determini la velocità del centro di massa con cui il cilindro arriva in fondo al piano inclinato (perdendo una quota di h=10 cm), ed il corrispondente tempo di percorrenza. Si determini inoltre il valore minimo del coefficiente di attrito statico necessario per garantire la condizione di rotolamento. [Momento di inerzia del cilindro rispetto al baricentro $I_c=Mr^2/2$]

2. Soluzione. Equazioni cardinali per il cilindro

Le forze agenti sul cilindro sono:
la forza peso **M*g*** applicata nel baricentro del cilindro;
la forza **F** che schematizza la forza del vento contraria al moto lungo l'asse t, applicata nel baricentro;
la reazione normale $\mathbf{R_n}$ applicata sul punto di contatto e lungo l'asse normale n ;
la forza di attrito statico $\mathbf{A_s}$ applicata sul punto di contatto e contraria al moto di discesa lungo t.



La **1ª equazione cardinale** proiettata lungo gli assi *n,t*

$$\begin{matrix}\hat{t} \\ \hat{n}\end{matrix}\begin{cases} Mgsen\alpha - A_s - F = Ma_c \\ R_n - Mg\cos\alpha = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

La **2ª equazione cardinale** calcolata rispetto ad un asse per il baricentro (solo l'attrito statico fornisce il momento necessario per fare rotolare il cilindro)

$$A_s r = I_c\frac{d\omega}{dt} = I_c\frac{a_c}{r} \quad \text{da cui} \quad A_s = \frac{I_c}{r^2}a_c \qquad (2)$$

(dalla condizione di rotolamento $\omega=v_c/r$ dove r è il raggio del cilindro)

Combinando le equazioni (1) e (2) si ottiene:

$$Mgsen\alpha - \frac{I_c}{r^2}a_C - F = Ma_c$$

da cui si ricava l'**accelerazione** del centro di massa del cilindro

$$a_c = \frac{Mgsen\alpha - F}{M + I_c/r^2} = \frac{Mgsen\alpha - F}{3M/2} = \frac{2}{3}\left(gsen\alpha - \frac{F}{M}\right) = \mathbf{1.258\ m/s^2}$$ **(**dove si assume $I_c=Mr^2/2$**)**

che dimostra come il centro di massa si muova di moto rettilineo uniformemente accelerato

$V_c(t)=a_c\cdot t$, percorrendo lo spazio $s(t)=a_c t^2/2$. Imponendo a fine corsa $s(t)=h/sen\alpha$ si ottiene

il **tempo complessivo di percorrenza** $t = \sqrt{\frac{2h}{a_c sen\alpha}}$ =**0.784 s**

e la **velocità finale del centro di massa** $V_C = a_C t = \sqrt{\frac{2a_C h}{sen\alpha}} = \sqrt{\frac{4}{3}\left(g - \frac{F}{Msen\alpha}\right)h}$ =**0.986 m/s**

Infine è necessario effettuare una verifica della condizione di rotolamento sull'attrito statico:

$$A_s = \frac{I_c}{r^2}a_c = \frac{M}{2}a_c \le A_{max} = \mu_s R_n = \mu_s Mg\cos\alpha$$

da cui il coefficiente di **attrito statico minimo** $\mu_s \ge \frac{a_c}{2g\cos\alpha} = \frac{1}{3}\left(tan\alpha - \frac{F}{Mgcos\alpha}\right)$ =**0.066**