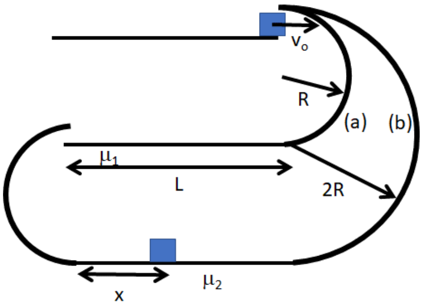
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
A.A. 2024-2025
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzioni del I Appello del 20 Giugno 2025 – 2 Turno

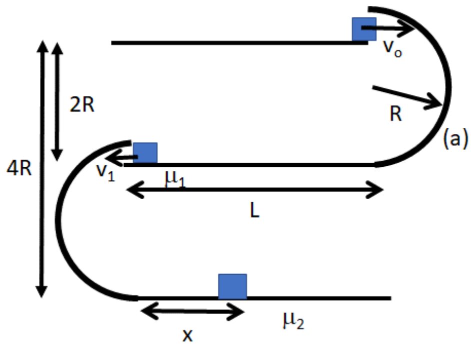
1. Testo. Un blocco di massa m=2 kg è lanciato alla velocità v_o attraverso un sistema di guide circolari (la guida del percorso *a* è di raggio R=0.08 m, mentre quella del percorso *b* è di raggio 2R) e di piani scabri di lunghezza L=2m con differenti coefficienti di attrito dinamico (μ_1=0.3, μ_2=0.5). Sapendo che indipendentemente dalla scelta del percorso (a) o (b) il blocco si ferma nella stessa posizione finale x, determinare il valore della posizione x, e della velocità di lancio v_o che deve avere inizialmente.



1. Soluzione.
Il blocco di massa m ha inizialmente energia meccanica E_o

$$E_o = U_o + K_o = mg(4R) + \tfrac{1}{2}mv_o^2 \quad (1)$$

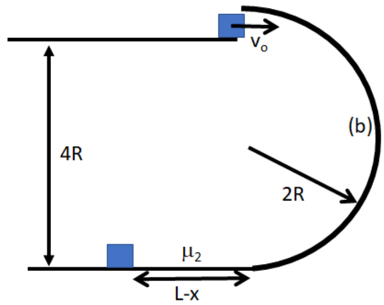
(*la quota iniziale z=4R è calcolata rispetto alla quota minima*)



Percorso (a)
L'energia meccanica finale è E_{fin}=0. La perdita di energia meccanica è dovuta all'attrito A_d=$\mu_d$mg che compie lavoro negativo durante il moto lungo i piani orizzontali scabri

$$L_{(a)} = -A_d \Delta s_a = -\mu_1 mgL - \mu_2 mgx = -mg(\mu_1 L + \mu_2 x) = \Delta E_m = E_{fin} - E_o \quad (2)$$

Percorso (b)
L'energia meccanica finale anche in questo caso è E_{fin}=0 sempre a causa del lavoro della forza di attrito durante il tratto di lunghezza (L-x) sul piano inferiore. per il percorso (b) è possibile scrivere una equazione analoga alla (2)



$$L_{(b)} = -A_d \Delta s_b = -\mu_2 mg(L-x) = \Delta E_m = E_{fin} - E_o \quad (3)$$

Imporre che il punto di arrivo sia lo stesso per qualsiasi percorso, comporta che le Eq.(2) e Eq.(3) coincidano, quindi $L_{(a)}=L_{(b)}$, ossia che

$mg(\mu_1 L + \mu_2 x) = \mu_2 mg(L-x)$ da cui si ricava la **posizione** $x = L\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{2\mu_2}\right)$ **=0.2·L=40 cm**

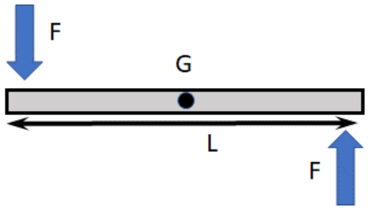
Inserendo questo risultato nella Eq,(3) e nelle Eq.(1) si ottiene

$$L_{(b)} = -\mu_2 mg(L-x) = \Delta E_m = E_{fin} - E_o = -E_o = -mg(4R) - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

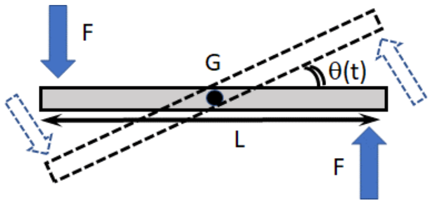
da cui si ricava la **velocità iniziale di lancio** $v_0 = \sqrt{2\mu_2 g(L-x) - 8gR}$ = **3.07 m/s**
(superiore alla velocità minima $v_{min} = \sqrt{2gR}$ = **1.25 m/s** per non staccarsi dalla guida di raggio 2R)

N.B. originariamente nel testo era stato indicato il valore errato R=1m, che porterebbe ad un valore impossibile per v_o. La prova scritta sarà quindi valutata solo sulle espressioni algebriche simboliche.

2. Testo. Un'asta rigida di massa M=2kg e di lunghezza L=2m, incardinata nel suo baricentro, è libera di ruotare in un piano orizzontale. Applicando ai due estremi due forze esterne costanti F=5N dirette in senso opposto (come indicato in figura) per un tempo t_o=0.5 s, la barra inizia a ruotare continuando anche quando cessano tali forze esterne per t>to. Determinare in quale istante di tempo la barra ha completato un intero giro. [Il momento di inerzia di una barra rotante intorno al suo baricentro vale $I_c=ML^2/12$]



2. Soluzione.
La coppia di forze fornisce un momento che mette in rotazione l'asta (nel piano orizzontale) in senso antiorario intorno al baricentro G. Applicando la II equazione cardinale rispetto ad un asse verticale per G si ottiene per la **prima fase di spinta** $(\boldsymbol{t \leq t_0})$



$M_G = F\left(\frac{L}{2}\right) + F\left(\frac{L}{2}\right) = FL = I_G \alpha_1 = I_G \frac{d\omega_1}{dt}$ da cui

$\alpha_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{F \cdot L}{I_G}$ e quindi per la **velocità angolare** $\omega_1(t) = \frac{F \cdot L}{I_G} t \quad (t \leq t_0)$

con **velocità angolare massima** alla fine della fase $\omega_{max} = \omega_1(t_o) = \frac{F \cdot L}{I_G} t_o = 12 \frac{F}{M \cdot L} t_o$ =**7.5 rad/s**

che integrata fornisce l'espressione dell'**angolo** $\theta_1(t) = \int_0^t \omega_1 dt = \int_0^t \frac{F \cdot L}{I_G} t dt = \left(\frac{F \cdot L}{I_G}\right) \frac{t^2}{2} \quad (t \leq t_0)$
(calcolato rispetto alla posizione di partenza) con valore finale al termine della prima fase
$\theta_1 = \left(\frac{F \cdot L}{I_G}\right) \frac{t_0^2}{2}$ =**1.875 rad (1)**

Nella successiva **seconda fase** $(\boldsymbol{t > t_0})$ quando cessa il contributo della coppia di forze ed il relativo momento, l'accelerazione angolare si annulla ed il moto diviene circolare uniforme

con **velocità angolare costante** e pari alla velocità angolare massima raggiunta al termine della prima fase $\omega_2 = \omega_{max} = \frac{F \cdot L}{I_G} t_o$ =**7.5 rad/s (2)**
l'angolo vale quindi $\theta_2(t) = \theta_1 + \omega_2(t - t_0) = \int_0^t \omega_1 dt = \int_0^t \frac{F \cdot L}{I_G} t dt = \left(\frac{F \cdot L}{I_G}\right) \frac{t^2}{2}$
dove il tempo è misurato sempre dall'istante iniziale della prima fase. Sostituendo le espressioni delle Eq.(1) e (2) si ottiene per **l'angolo nella seconda fase**

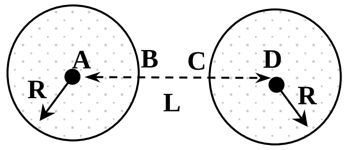
$$\theta_2(t) = \theta_1 + \omega_2(t - t_0) = \left(\frac{F \cdot L}{I_G}\right) \frac{t_0^2}{2} + \left(\frac{F \cdot L}{I_G} t_o\right)(t - t_0) = \left(\frac{F \cdot L}{I_G}\right) t_0 \left(t - \frac{t_0}{2}\right)$$

Imponendo che l'asta esegua un giro completo $\theta_2 = 2\pi$

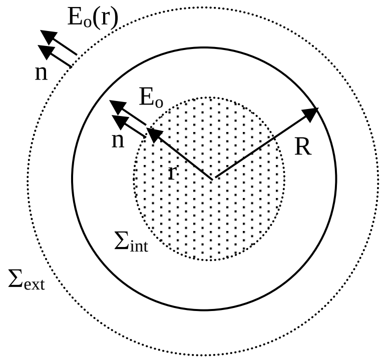
si ottiene il **tempo finale** $t = \frac{t_0}{2} + \frac{2\pi \cdot I_G}{F \cdot L \cdot t_0} = \frac{t_0}{2} + \frac{\pi}{6} \frac{M \cdot L}{F \cdot t_0}$ =**1.088 s**

oppure più semplicemente in funzione dei termini già calcolati $t = t_0 + \frac{2\pi - \theta_1}{\omega_{max}} = \mathbf{1.088\ s}$

3. **Testo.** Due sfere di raggio R disposte alla distanza L=2m hanno densità di carica opposta **ρ** e **–ρ** uniformemente distribuita nel volume. Conoscendo il raggio delle due sfere R=50cm , e la differenza di potenziale fra le due superfici dei cilindri V_B-V_C=100V calcolare la densità di carica **ρ.** Determinare anche quale deve essere la differenza di potenziale fra i due centro V_A-V_D



3. **Soluzione.** Campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica con densità di carica volumetrica ρ

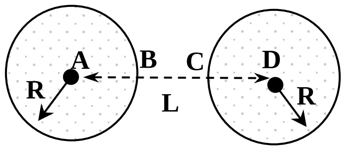


Il flusso uscente dalla superficie sferica generica Σ di raggio *r* vale $\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$=$Q_{int}/\varepsilon_o$

dove $Q_{int} = \begin{cases} \rho\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right) & r < R \\ \rho\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right) & r \geq R \end{cases}$

da cui si ricava il modulo del **campo elettrico** $\begin{cases} E_{int} = \rho r/3\varepsilon_o & r < R \\ E_{ext} = \rho R^3/3\varepsilon_o r^2 & r \geq R \end{cases}$

La **differenza di potenziale** (*dovuta alla sola carica +ρ)*



fra i punti B e C sulle superfici delle due sfere

$$V_B - V_C = \int_R^{L-R} E_{ext} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{L-R} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\frac{R^2(L-2R)}{L-R} \qquad (1)$$

mentre fra i punti A e D al centro delle sfere

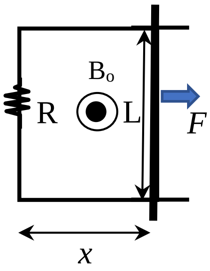
$$V_A - V_D = \int_0^R E_{\text{int}} dr + \int_R^L E_{ext} dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^L = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\frac{R^2(3L-2R)}{2L} \qquad (2)$$

Si dimostra poi facilmente che la **differenza di potenziale** dovuta ad entrambe le cariche **+ρ** e **–ρ** si ottiene raddoppiando il risultato precedente. (Entrambe le Eq. 1 e 2 vanno moltiplicate per due!)

da cui si calcola la **densità volumetrica** $\rho = \frac{3}{2}\varepsilon_o \Delta V_{BC} \frac{L-R}{R^2(L-2R)}$ **=7.96 nC/m³**

e la **differenza di potenziale fra i centri** $\boldsymbol{\Delta V_{AD}} = \Delta V_{BC}\left[\frac{(3L-2R)(L-R)}{2L(L-2R)}\right]$ =1.875 ΔV_{BC} = **187 V**

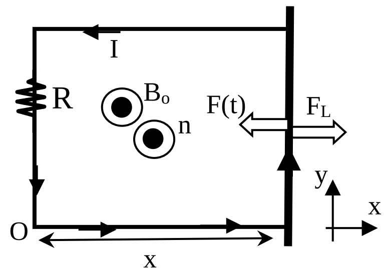
4. Testo. Una barretta metallica di massa m=10g è libera di spostarsi orizzontalmente lungo una guida metallica in modo da formare un circuito elettrico con R=2Ω di forma rettangolare di lati L ed x con x(t) variabile ed L=1m. Il circuito giace in una regione piana dove è applicato un vettore induzione magnetica uniforme (con verso uscente dal foglio) variabile nel tempo con legge $B_o(t)=B_{max}*(1-m*t)$ (con B_{max}=1T, m=0.1 s^{-1} per t<10s. La barra viene posizionata con velocità nulla nella posizione con x_o=50 cm. Determinare l'espressione della forza F(t) che occorre applicare sul lato mobile affinché la barretta rimanga ferma calcolando il valore numerico del massimo di tale forza per t<10s. Determinare inoltre l'espressione della corrente elettrica i(t) circolante calcolando il valore numerico del massimo di tale corrente. Determinare infine l'energia dissipata dalla resistenza elettrica per tutto il tempo fino a t=10s.



4. Soluzione.

L'orientazione della corrente circolante nella spira (antioraria) è scelta in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia stessa direzione e verso di $\vec{B}$. Quindi il **flusso concatenato** con la spira Φ_c è

$$\Phi_c = \iint \vec{B} \cdot \hat{n} dxdy = B_o(t) \int_0^{x(t)} dx \int_0^L dy = B_o(t) \cdot L \cdot x(t)$$



Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola

la **forza elettromotrice indotta** nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{d}{dt}[B_o(t) \cdot L \cdot x(t)] = -B_{max}L[(1-mt)v_x - m \cdot x]$$

Poichè però la barretta non si muove (v_x=0) in virtù dell'applicazione di una forza esterna F(t) che controbilancia la forza magnetica F_L, la **f.e.m. indotta** diviene $f_i = B_{max} \cdot L \cdot m \cdot x$ =**50 mV**

l'**intensità di corrente indotta** nel circuito $\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{f_i}}{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{B_{max} \cdot L \cdot m \cdot x}}{\boldsymbol{R}} =$ **25 mA**

La **forza magnetica** agente sulla barra $\vec{F}_L = I\int d\vec{l} \times \vec{B}_o$ ed è contrastata dalla forza esterna *F(t)* (diretta come in figura) di intensità $F(t) = F_L = ILB_0 = \left(\frac{B_{max}^2 L^2}{R}\right) m(1-mt)x$

che parte dal valore massimo iniziale in *t=0* $F_{max} = F(0) = \left(\frac{B_{max}^2 L^2}{R}\right) m \cdot x =$ **0.025 N**

La **potenza dissipata sulla resistenza** è $P_R = \boldsymbol{I}^2 R = \frac{f_i^2}{R} = \frac{(\boldsymbol{B_{max} \cdot L \cdot m \cdot x})^2}{\boldsymbol{R}} =$ **1.25 mW**

L'energia dissipata fino al tempo *t=10s* vale $E_R = \int_0^t P_R dt = \boldsymbol{I}^2 Rt = \frac{(\boldsymbol{B_{max} \cdot L \cdot m \cdot x})^2 \boldsymbol{t}}{\boldsymbol{R}}$ =**12.5 mJ**

N.B. Successivamente (t>10s) il campo magnetico e la f.e.m indotta si annullano e nel circuito non circola più corrente indotta.