



FISICA

A.A. 2017-2018

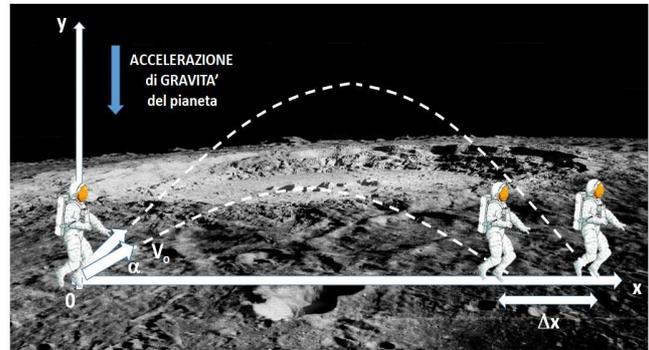
Ingegneria Gestionale

1° appello del 6 Giugno 2018

Esame completo

1. Un astronauta si trova al polo di un pianeta sconosciuto privo di atmosfera. Per testare la gravità presente sul pianeta egli spicca una serie di salti tutti alla medesima velocità iniziale $V_0=9\text{m/s}$, dallo stesso punto di partenza e con due angolazioni possibili rispetto all'orizzontale ($\alpha=30^\circ$ e $\beta=40^\circ$). Sapendo che egli atterra in due punti distinti alla distanza $\Delta x_1=4\text{m}$ l'uno dall'altro determinare l'accelerazione di gravità g del pianeta.

Facoltativo: ripetendo lo stesso esperimento all'equatore si ottiene invece $\Delta x_2=4.1\text{m}$. Conoscendo $R=2000\text{ km}$ il raggio del pianeta, determinare il periodo di rotazione T del pianeta intorno all'asse.



1. Equazioni della cinematica. Le grandezze cinematiche vengono scomposte secondo gli assi x, y

$$\text{Lungo l'asse } x \quad \begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha) \cdot t \\ v_x(t) = v_0 \cos(\alpha) \\ a_x = 0 \end{cases}, \text{ e lungo l'asse } y \quad \begin{cases} y(t) = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - gt^2/2 \\ v_y(t) = v_0 \sin(\alpha) - gt \\ a_y = -g \end{cases}$$

Calcolo della gittata:

Il tempo di volo si ottiene imponendo $y(t^*)=0$ da cui $t^* = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$

La gittata L si ottiene dalla $L=x(t^*)=v_0 t^* \cos \alpha = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$

La differenza fra le due gittate è quindi calcolabile come $\Delta x_1 = \frac{v_0^2}{g} [\sin(2\beta) - \sin(2\alpha)]$

da cui si ottiene la **accelerazione di gravità** $g = \frac{v_0^2}{\Delta x_1} [\sin(2\beta) - \sin(2\alpha)] = 2.405 \text{ m/s}^2$

Facoltativo: l'accelerazione di gravità percepita sulla superficie del pianeta ha una componente preponderante dovuta alla attrazione gravitazionale cui si sottrae una piccola componente dovuta alla forza centrifuga (presente all'equatore ma non al polo). Ciò porta ad una differenza fra le

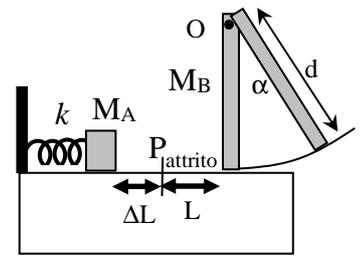
accelerazioni relative percepite al polo e all'equatore $\Delta g = g_{polo} - g_{equatore} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$

D'altra parte la quantità Δg è legata ai differenti Δx misurati

$\Delta g = g_{polo} - g_{equatore} = v_0^2 [\sin(2\beta) - \sin(2\alpha)] \left(\frac{1}{\Delta x_1} - \frac{1}{\Delta x_2} \right) = 0.0587 \text{ m/s}^2$ da cui il periodo di

rotazione $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{\Delta g}} = \frac{2\pi}{v_0} \sqrt{\frac{R}{\sin(2\beta) - \sin(2\alpha)} \frac{\Delta x_2 \cdot \Delta x_1}{\Delta x_2 - \Delta x_1}} = 36686 \text{ s} = 10\text{h } 11\text{m } 26\text{s}$

2. Una molla di massa trascurabile e di costante elastica $k=100 \text{ N/m}$ è posizionata tra una parete fissa ed una massa $M_A=1 \text{ kg}$ libera di muoversi lungo un tavolo orizzontale scabro ($\mu_d=0.1$). La molla viene compressa di $\Delta L=30\text{cm}$ e quando viene liberata riesce a lanciare la massa M_A lungo il tavolo. Quando la molla raggiunge la sua lunghezza a riposo, nel punto P, la massa M si distacca ed affronta un tratto di lunghezza $L=50\text{cm}$.



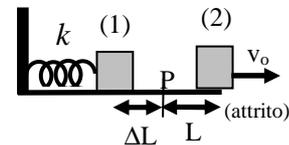
Successivamente la massa urta l'estremo di una barra verticale di massa $M_B=4\text{kg}$ e di lunghezza $d=25\text{cm}$ incardinata per l'altro estremo. Sapendo che l'urto è perfettamente anelastico determinare l'inclinazione massima rispetto alla verticale raggiunta dal pendolo composto dalle masse M_A e M_B

2. Moto lungo il piano orizzontale

Durante il moto lungo il piano orizzontale la massa, sospinta dalla molla fino in P, affronta un tratto con attrito L giungendo sul bordo del tavolo con velocità v_o . L'energia meccanica iniziale in (1) è superiore all'energia meccanica sul bordo del tavolo in (2) a causa della dissipazione per attrito

Energia meccanica in (1) $E_1 = \frac{1}{2} k \cdot \Delta L^2$

Energia meccanica in (2) $E_2 = \frac{1}{2} M_A \cdot v_o^2$



Lavoro delle forze non conservative $L_{nc} = -A_d \cdot (L + \Delta L) = -\mu_d M_A g (L + \Delta L) = E_2 - E_1$

da cui la velocità di impatto di M_A con la barra è $v_o = \sqrt{\frac{k}{M_A} \Delta L^2 - 2\mu_d g (L + \Delta L)} = 2.73 \text{ m/s}$

Nel successivo **urto perfettamente anelastico** si conserva il momento della quantità di moto

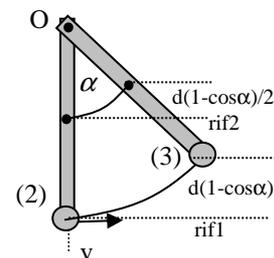
$b_{prima} = b_{dopo}$ da cui $M_A v_o d = (I_{barra} + I_{MA}) \omega = \left(\frac{1}{3} M_B d^2 + M_A d^2 \right) \omega$

da cui si calcola la **velocità angolare** di partenza nel punto (2) $\omega = \frac{M_A v_o}{M_A + M_B/3} \frac{1}{d} = 4.67 \text{ rad/s}$

Calcolo energia meccanica nello stato (2)

Assumendo nulla l'energia potenziale complessiva nello stato (2), l'energia meccanica coincide con l'energia cinetica di rotazione

$E_{m2} = K_2 = \frac{1}{2} I_{tot} \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} M_B d^2 + M_A d^2 \right) \omega^2$



Calcolo energia meccanica nello stato (3)

Essendo nulla l'energia cinetica nello stato (3), l'energia meccanica diviene

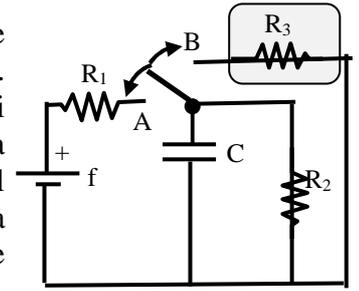
$E_{m3} = U_b = M_B g \frac{d}{2} (1 - \cos \alpha) + M_A g d (1 - \cos \alpha) = \frac{gd}{2} (M_B + 2M_A) (1 - \cos \alpha)$

dove sono stati distinti i riferimenti per calcolare le variazioni di quota delle masse

Infine imponendo la conservazione dell'energia meccanica $E_{m2} = E_{m3}$

si può calcolare l'**angolo massimo di oscillazione** $\alpha = \arccos \left[1 - \frac{\omega^2 d}{3g} \left(\frac{3M_A + M_B}{2M_A + M_B} \right) \right] = 38.4^\circ$

3. Il circuito in figura è da lungo tempo operante con il tasto dell'interruttore posizionato in A, in modo da caricare completamente il condensatore C. Determinare la carica presente sul condensatore. Nell'istante $t=0$ il tasto T si muove nella posizione B in modo che, scollegando f, il condensatore possa scaricarsi sulle resistenze. Determinare l'energia dissipata per effetto Joule sul resistore R_3 dopo un tempo $t_1=7\text{ms}$. Sapendo che su R_3 è posta una minima quantità d'acqua di 2g inizialmente alla temperatura 20°C , determinare infine la temperatura dell'acqua all'istante t_1 [Dati: $f=10\text{kV}$, $R_1=10\text{k}\Omega$, $R_2=10\text{k}\Omega$, $R_3=10\text{k}\Omega$, $C=1\mu\text{F}$, $C_{\text{acqua}}=1\text{kcal/kg }^\circ\text{C}$]



3. Primo processo di carica

La resistenza di maglia è $R_{\text{tot1}} = R_1 + R_2 = 20 \text{ k}\Omega$

e la corrente di maglia è $I = \frac{f}{R_{\text{tot1}}} = 0.5 \text{ A}$

La carica sul condensatore a regime

$$q_o = \Delta V_c C = \Delta V_{R_2} C = I \cdot R_c \cdot C = fC \frac{R_2}{R_{\text{tot1}}} = 5\text{mC}$$

Il tempo caratteristico di scarica $\tau = (R_2 \parallel R_3)C = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} C = 5 \text{ ms}$

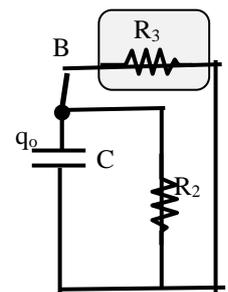
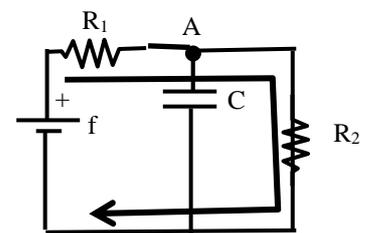
La carica ai capi del condensatore dopo t_1 è quindi $q(t_1) = q_o \exp(-t_1/\tau)$

L'energia persa dal condensatore e dissipata sulle resistenze è

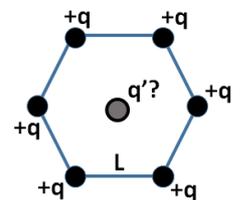
$$E_J = \frac{q_o^2}{2C} - \frac{q^2(t_1)}{2C} = \frac{q_o^2}{2C} [1 - \exp(-2t_1/\tau)] = 11.74 \text{ J}$$

di cui la metà si dissipa su R_3 : $E_{R_3} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} E_J = \frac{E_J}{2} = 5.87 \text{ J}$

Questa energia innalza la temperatura dell'acqua a $T = T_o + \frac{E_{R_3}}{mc_{\text{acqua}}} = 20.7 \text{ }^\circ\text{C}$



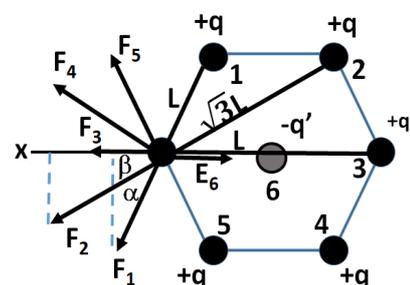
4. Date sei cariche puntiformi identiche di carica positiva $q = 10\mu\text{C}$ ai vertici di un esagono regolare di lato $L=10\text{cm}$, calcolare quale carica puntiforme q' deve essere posta al centro dell'esagono per mantenere il sistema in quiete



4. L'equilibrio del sistema viene valutato su una delle sei cariche esterne $+q$. Per ragioni di simmetria la somma di tutte le forze agenti ha risultante lungo l'asse x. Per questa ragione tutte le forze vanno proiettate e sommate lungo x dando risultante nulla:

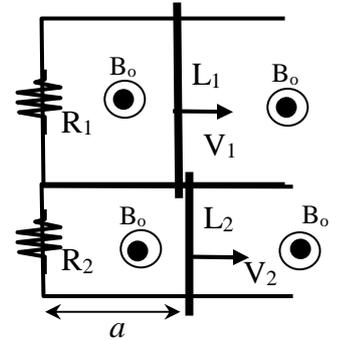
$$F_{1,x} = F_{5,x} = F_1 \cos \alpha = k_o \frac{q^2}{L^2} \cos(60^\circ), \quad F_{2,x} = F_{4,x} = F_2 \cos \beta = k_o \frac{q^2}{3L^2} \cos(30^\circ)$$

$$F_{3,x} = F_3 \cos(0) = k_o \frac{q^2}{4L^2}, \quad F_{6,x} = F_3 \cos(0) = -k_o \frac{qq'}{L^2}$$



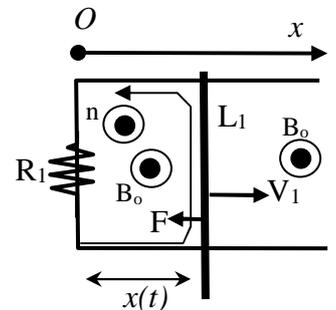
$$\sum_k F_{k,x} = \frac{k_o}{L^2} \left[q^2 \left(2 \cos(60^\circ) + 2 \frac{\cos(30^\circ)}{3} + \frac{1}{4} \right) - qq' \right] = 0 \quad \text{da cui} \quad q' = q \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4} \right) = 1.83 q = \mathbf{18.3 \mu C}$$

5. Due barrette metalliche di lunghezza $L_1=50\text{cm}$ ed $L_2=40\text{cm}$ e di masse $m_1=50\text{g}$ e $m_2=40\text{g}$ sono libere di spostarsi lungo due guide metalliche parallele come in figura in modo da formare due circuiti elettrici indipendenti di forma rettangolare con resistenze rispettivamente $R_1=10\Omega$, $R_2=5\Omega$. In tutta la regione piana è presente un vettore induzione magnetica uniforme verticale $B_o=2\text{T}$. Assumendo di muovere la prima barretta, inizialmente posizionata in $x_o=a=20\text{cm}$, con velocità iniziale $V_1=2\text{m/s}$ lungo l'asse x determinare lo spazio percorso dalla barretta prima di fermarsi per effetto del freno elettromagnetico. Determinare anche con quale velocità V_2 deve essere lanciata la seconda (sempre partendo da x_o) per fermarsi nella stessa posizione.



5. Il circuito complessivo può essere scomposto in due semplici circuiti indipendenti. Nel primo circuito dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spirale \hat{n} abbia la stessa direzione e verso di \vec{B}_o , si calcola il flusso concatenato con la spirale

$$\Phi_c = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int B dS = B_o \int_0^x dx \int_0^{L_1} dy = B_o L_1 \cdot x(t)$$



Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spirale $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -B_o L_1 \cdot V_1$ che porta alla corrente indotta $i = \frac{f_i}{R_1} = -\frac{B_o L_1 \cdot V_1}{R_1}$ che è negativa (la corrente tende quindi a circolare in senso inverso rispetto a quella in figura)

Data la corrente indotta, i quattro lati del circuito subiranno delle forze attrattive di natura magnetica, in accordo alla seconda formula di Laplace $\vec{F} = i \int d\vec{l} \times \vec{B}_o$

In particolare sull'unico lato mobile viene generata una forza frenante $F = i L_1 B_o = B_o^2 L_1^2 V_1 / R_1$ contraria al moto (asse x) e proporzionale alla velocità di caduta. Applicando il II principio della dinamica lungo l'asse del moto

$$-F = -\frac{B_o^2 L_1^2}{R_1} V_1 = m_1 a = m_1 \frac{dV_1}{dt}$$

che ha soluzione $v(t) = V_1 \exp(-t/\tau)$ dove $\tau = \frac{m_1 R_1}{B_o^2 L_1^2}$. Lo spazio percorso è

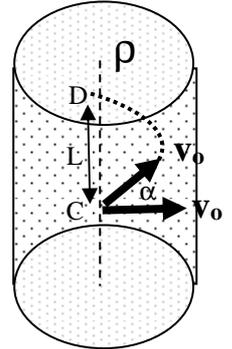
$$\Delta s_1 = \int_0^\infty v(t) dt = V_1 \int_0^\infty \exp(-t/\tau) dt = V_1 \left[-\frac{\exp(-t/\tau)}{1/\tau} \right]_0^\infty = V_1 \tau = V_1 \frac{m_1 R_1}{B_o^2 L_1^2} = \mathbf{1\text{m}}$$

La seconda barra viene lanciata con la velocità V_2 e percorre lo spazio $\Delta s_2 = V_2 \frac{m_2 R_2}{B_o^2 L_2^2}$

Affinché la seconda barra si fermi nella stessa posizione $V_2 = V_1 \frac{m_1 R_1}{m_2 R_2} \frac{L_2^2}{L_1^2} = 1.6 \cdot V_1 = \mathbf{3.2 \text{ m/s}}$

ESERCIZI SOSTITUTIVI PER ESONERO II

a. Un cilindro di lunghezza infinita e di raggio R molto grande è carico con densità volumetrica uniforme $\rho = 1 \text{ nC/m}^3$. All'interno del cilindro in un punto C dell'asse si trova un elettrone, lanciato con una velocità radiale $V_0 = 1 \text{ km/s}$. Descrivere il tipo di moto cui è soggetto l'elettrone, calcolare la massima distanza dall'asse cui può arrivare prima di invertire il moto. Ripetere l'esercizio lanciando l'elettrone con la stessa velocità però inclinata di $\alpha = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Determinare dopo quanto tempo ritorna sul punto dell'asse D e quale sia lo spostamento $L = CD$ [la massa dell'elettrone $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; la carica dell'elettrone: $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$]



a. Il campo elettrico interno al cilindro può essere calcolato applicando la legge di Gauss alla superficie cilindrica Σ concentrica, di lunghezza L e di raggio $r < R$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_o) = \int \vec{E}_o \cdot \hat{n}_{ext} dS = 2\pi r L = \frac{Q_{int}}{\epsilon_o} = \frac{\rho \pi r^2 L}{\epsilon_o} \quad \text{da cui si ricava il campo interno } E_{o,int} = \frac{\rho}{2\epsilon_o} r$$

L'elettrone quindi è soggetto ad una forza attrattiva diretta lungo l'asse delle x verso il centro C

Il moto lungo l'asse radiale si ottiene applicando il 2° principio della dinamica

$$m_e a_r = -e E_r, \quad \text{ossia } m_e \frac{d^2 r}{dt^2} = -\left(\frac{e\rho}{2\epsilon_o}\right) r, \quad \text{e quindi } \frac{d^2 r}{dt^2} + \omega^2 r = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{e\rho}{2m_e \epsilon_o}} = 3.15 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$$

che è un moto armonico lungo r , del tipo $r = r_{max} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$ con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.99 \mu\text{s}$

Imponendo la velocità iniziale $v_o = \left.\frac{dr}{dt}\right|_o = \omega r_{max}$ da cui l'ampiezza massima $r_{max} = \frac{v_o}{\omega} = 0.32 \text{ mm}$

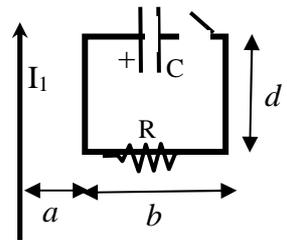
Viceversa quando la velocità di lancio viene inclinata di un angolo α , la velocità di lancio si scompone in una componente radiale $v_o \cos \alpha$ ed una verticale $v_o \text{sen} \alpha$

Conseguentemente il moto si scompone in un moto armonico lungo l'asse r e di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse z .

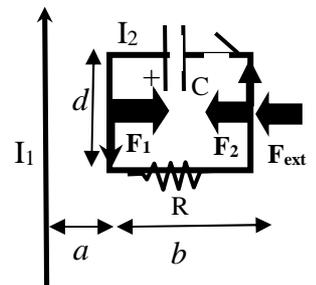
$$\begin{cases} r = \frac{v_o \cos \alpha}{\omega} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \\ z = v_o t \cdot \text{sen} \alpha \end{cases} \quad \text{il punto ritorna sull'asse dopo metà periodo: } t = T/2 = 0.996 \mu\text{s}$$

La distanza $CD = z = v_o t \cdot \text{sen} \alpha = \frac{v_o T}{2} \text{sen} \alpha = 0.5 \text{ mm}$

b. Un filo infinitamente lungo è percorso dalle corrente $I_1 = 2\text{A}$. Una spira rettangolare di lati $b=10\text{cm}$ e $d=8\text{cm}$ giace nello stesso piano del filo ad una distanza $a=5\text{cm}$ da esso (vedi figura). Nella spira è presente un condensatore inizialmente carico con una energia $E=100\text{mJ}$ e con una capacità $C=1\mu\text{F}$. Quando l'interruttore si chiude all'istante $t=0$ il condensatore si scarica sulla resistenza $R=10\text{k}\Omega$. Determinare la corrente I_2 della spira (per $t_1=0$ e per $t_2=10\text{ms}$) e quale forza esterna deve essere applicata sulla spira (per $t_1=0$ e per $t_2=10\text{ms}$) per equilibrare la forza complessiva causata della corrente I_1 . Trascurare i fenomeni di induzione elettromagnetica.



b. La spira rettangolare è sottoposta a forze magnetiche interne ed esterne. Le forze magnetiche interne, dovute al campo magnetico da essa stessa generato, hanno risultante nulla e quindi nel caso di una spira rigida non danno alcun effetto. Le forze magnetiche esterne sono quelle dovute ai campi magnetici \mathbf{B}_1 generato dalla corrente \mathbf{I}_1 . Tali forze esterne sono descritte in generale dalla 2^a formula di Laplace. Delle



Le forze sui lati orizzontali della spira sono uguali ed opposte e si bilanciano. Sono invece non compensate le forze sui due lati verticali

$$F_1 = B_1 I_2 d = \frac{\mu_o}{2\pi a} I_1 I_2 d \quad (\text{repulsiva}), \quad F_2 = B_1 I_2 d = \frac{\mu_o}{2\pi(a+b)} I_1 I_2 d \quad (\text{attrattiva})$$

$$\text{La forza esterna da applicare è } F^{tot} = F_1 - F_2 = \frac{\mu_o}{2\pi} I_1 I_2 d \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right) = \frac{\mu_o}{2\pi} I_1 I_2 \frac{d \cdot b}{a(a+b)}$$

$$\text{dove } I_2 = \frac{q_o}{RC} \exp(-t/RC) = \frac{\sqrt{2E/C}}{R} \exp(-t/RC) \quad \text{con l'energia iniziale } E = \frac{q_o^2}{2C}$$

$$\text{Combinando } F^{tot} = F_{\max} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad \text{con } F_{\max} = \frac{\mu_o}{2\pi} I_1 \frac{\sqrt{2E/C}}{R} \frac{d \cdot b}{a(a+b)} = \mathbf{1.9 \cdot 10^{-8} \text{ N}}$$

$$\text{Inizialmente per } t=0 \quad F=F_{\max} = \mathbf{1.9 \cdot 10^{-8} \text{ N}},$$

$$\text{per } t=\tau=10\text{ms} \quad F=F_{\max} \exp(-1) = \mathbf{7 \cdot 10^{-9} \text{ N}}$$