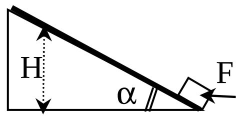
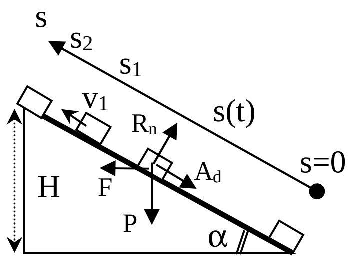
FISICA

A.A. 2015-2016
Ingegneria Gestionale
1° appello del 21 Giugno 2016
Esame completo

1. Un blocco di massa m=500g è fermo alla base di un piano inclinato scabro inclinato di un angolo α=30° rispetto all'orizzontale con un coefficinte di attrito statico μ_s=0.4, e dinamico μ_d =0.3. Al tempo t=0 sul blocco comincia a soffiare un vento in direzione orizzontale con la forza F indicata in figura. Determinare il valore minimo della forza F_{min} che tende a far salire il blocco lungo il piano. Inoltre ipotizzando che una forza del vento F=10 N agisca costantemente per Δt=10s calcolare l'altezza massima raggiunta H ed il relativo istante di tempo.





1. Il blocco è inizialmente fermo. Quando viene applicata la forza orizzontale F=10N, il blocco è inoltre soggetto alla forza peso P, alla reazione normale R_n, ed alla forza di attrito dinamico $A_d=\mu_d R_n$. Proiettando le forze lungo la normale e la tangenziale si ottiene il sistema:

$$\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases}R_n - P\cos\alpha - F\sin\alpha = 0\\ F\cos\alpha - P\sin\alpha - \mu_d R_n = ma\end{cases} \quad \begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases}R_n = P\cos\alpha + F\sin\alpha\\ F\cos\alpha - P\sin\alpha - \mu_d\left(P\cos\alpha + F\sin\alpha\right) = ma\end{cases}$$

da cui la **accelarazione** di salita $a_1 = \frac{F}{m}(\cos\alpha - \mu_d sen\alpha) - g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)$**= 6.874 m/s^2 (Eq.1)**

per integrazione si ottiene la **velocità dopo 10s** $v(t) = at$ da cui **v_1=68.7 m/s**

e per ulteriore integrazione lo **spazio percorso dopo 10s** $s(t) = at^2/2$ da cui **s_1=343.7 m**

Dopo t=10s il vento cessa la sua azione (F=0) ed il corpo decelera uniformemente (usando la Eq.1 con F=0) percorrendo ancora un piccolo tratto in salita prima di raggiungere la massima quota H dove inverete il moto per ridiscendere a valle. Riazzerando il tempo le equazioni della cinematica divengono

$a_2 = -g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)$**= -7.45 m/s^2** (decelerazione)
$v_2 = v_1 + a_2 t$ (a_2 è negativa!)
$s_2 = s_1 + v_1 t + a_2 t^2/2$

Per trovare il punto di inversione si impone v_2=0 e si ottiene il tempo successivo ai primi 10s di spinta, necessario per arrivare sulla sommità $t^* = \frac{v_1}{-a_2} =$ **9.23 s**

Lo spazio totale percorso per arrivare alla sommità è quindi $s_2 = s_1 + v_1 t^* + a_2 t^{*2}/2$ **=661 m**
corrispondenti ad una **altezza** $H = s_2 sen\alpha$ **=330.5 m**

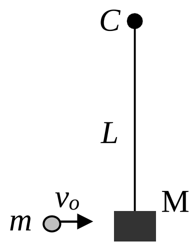
Il **caso statico in cui la forza F non è sufficiente per spostare la massa**

$$\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases}R_n - P\cos\alpha - F\sin\alpha = 0\\ F\cos\alpha - P\sin\alpha - A_s = 0\end{cases}$$ da cui $A_s = F\cos\alpha - P\sin\alpha \le \mu_s R_n = \mu_s\left(P\cos\alpha + F\sin\alpha\right)$

per cui la forza per garantire la statica deve essere $F \le P\frac{\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}$ **=F_{min}=6.23 N**

ove F_{min} è il primo valore che permette il primo distacco

2. Un proiettile di massa *m* e velocità v_o=200m/s perfora un blocco di legno di massa M=0.5 kg fuoriuscendone con velocità $v_o/4$. Si calcoli il minimo valore della massa del proiettile *m* affinché il blocchetto, inizialmente fermo, compia un giro completo intorno al centro di sospensione C collegato al blocchetto tramite una fune di massa trascurabile e di lunghezza L=70 cm. Si determini anche l'energia persa durante l'urto.

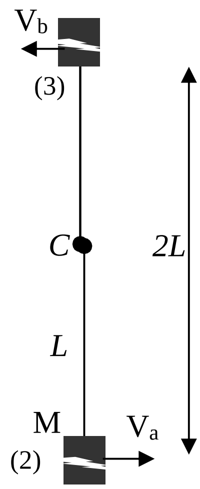


2. PROCESSO D'URTO

In tutti i processi d'urto fra masse puntiformi, la quantità di moto viene conservata

$mv_o = m\frac{v_o}{4} + MV_a$ da cui la massa del proiettile deve valere $m = \frac{4V_a}{3v_o}M$ (Eq.1)

L'energia persa durante l'urto $Q = \frac{1}{2}mv_o^2 - \left(\frac{1}{2}m\frac{v_o^2}{16} + \frac{1}{2}MV_A^2\right) = \frac{15}{32}mv_o^2 - \frac{1}{2}MV_a^2$ (Eq,2)



MOTO DI SALITA DEL PENDOLO

La relazione esistente tra la velocità di salita V_a nel punto più basso della traiettoria e quella V_b nel punto più alto è legata alla conservazione dell'energia meccanica tra i punti (2) e (3)

$\frac{1}{2}MV_b^2 + 2MgL = \frac{1}{2}MV_a^2$ da cui $V_a = \sqrt{V_b^2 + 4gL}$

Poiché V_b ha una minima velocità per poter compiere il giro completo
che può essere calcolata equilibrando la forza peso con la forza centrifuga in (3)

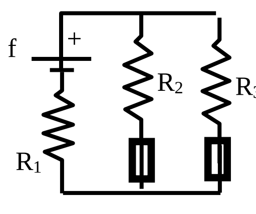
$M\frac{V_{b,\min}^2}{L} = Mg$ da cui $V_{b,\min} = \sqrt{gL}$, ciò si riflette sull'esistenza di una velocità minima in (2)

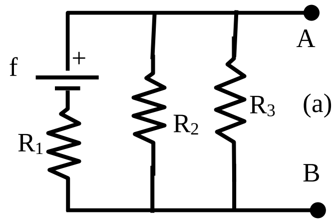
$V_{a,\min} = \sqrt{V_{b,\min}^2 + 4gL} = \sqrt{5gL}$ che combinata con la Eq.1 permette di calcolare

la **minima massa del proiettile** $m_{\min} = \frac{4}{3}\frac{M\sqrt{5gL}}{v_o} = \mathbf{19.5\ g}$

L'energia persa durante dalla Eq.(2) diventa $Q = \mathbf{357\ J}$

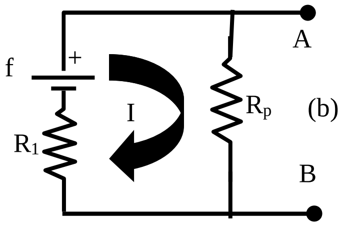
3. Il circuito resistivo in figura viene alimentato da una forza elettromotrice f=10kV. Nei rami dove sono presenti le resistenze R_2 ed R_3, sono posizionati due fusibili identici in stagno di lunghezza L=5cm e sezione S=0.01mm^2 che in caso di alte correnti fondono interrompendo la corrente nel ramo. Sapendo che il circuito è inizialmente alla temperatura T_o=30°C e che la temperatura di fusione dello stagno è T_f=230°C determinare quale dei due fusibili fonde per primo e in quale istante dalla chiusura dell'interruttore. Si ipotizzi che l'aumento di temperatura sul fusibile sia per effetto joule ma che sul fusibile ci sia una caduta di tensione trascurabile ai fini del calcolo delle correnti. Trascurare anche il calore latente di fusione dello stagno. **Facoltativo:** Calcolare la temperatura del secondo fusibile quando si fonde il primo e a quale istante fonderà anche il secondo fusibile [Dati: R_1=3.8kΩ, R_2=2kΩ, R_3=3kΩ, calore specifico, densità e resistività dello stagno C=228 J/kgK, δ=7300 kg/m^3, ρ=10^{-7} Ωm]





3. Dopo aver trascurato le cadute di tensione sui due fusibili il circuito in figura a), composto da due maglie, può essere ulteriormente ridotto ad una maglia come in figura b). I due rami resistivi centrale e a destra risultano in parallelo e possono essere sostituiti da una unica resistenza $R_p = R_2 // R_3$. La corrente di maglia è data quindi dalla formula

$I = \dfrac{f}{R_1 + R_p}$ dove $R_p = \dfrac{R_s \cdot R_3}{R_s + R_3}$=**1.2 kΩ** da cui **I=2A**



La differenza di potenziale fra i punti A e B vale per la legge di Ohm

$V_A - V_B = I \cdot R_p =$ **2.4 kV**

La corrente che transita in R2 è $I_2 = \dfrac{V_A - V_B}{R_s} =$ **1.2 A**

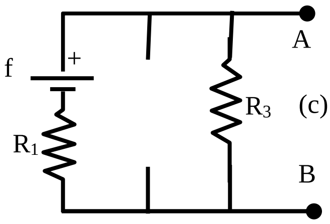
la corrente che transita in R3 è $I_3 = \dfrac{V_A - V_B}{R_3} =$ **0.8 A**

La potenza dissipate per effetto Joule su un fusibile è data da $P = I^2 R_{fus} = I^2 \rho L/S$

L'energia termica sviluppata nel tempo serve a portare il fusibile alla temp di fusione $P \cdot t = mC\Delta T = \delta(S \cdot L) \cdot C \cdot (T_f - T_o)$

Uguagliando le espressioni si ottengono il tempo per arrivare alla fusione $t = \dfrac{\delta \cdot S^2 \cdot C \cdot (T_f - T_o)}{I^2 \rho}$

Il primo fusibile a fondere per primo dopo **t=0.231 s** è quello sulla R2, perché il secondo fusibile su R3 fonderebbe dopo **t=0.5 s**



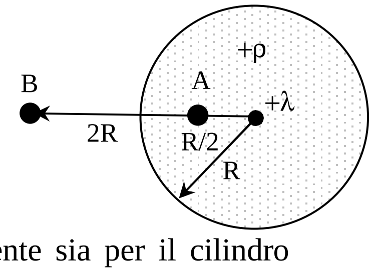
Facoltativo: dopo **t=0.231 s** il primo fusibile fonde ed il secondo su R3

raggiunge **la temperatura** $T_{fusibile} = T_o + \dfrac{I_3^2 \cdot \rho \cdot t}{\delta \cdot S^2 \cdot C}$ =**118.9 °C**

In quell'istante il ramo di R2 si interrompe e la corrente scorre solo su R3

$I_3 = \dfrac{f}{R_1 + R_3} =$ **1.47 A** ed il **tempo residuo** è $t = \dfrac{\delta \cdot S^2 \cdot C \cdot (230 - 118.9)}{I^2 \rho} =$ **0.085 s**

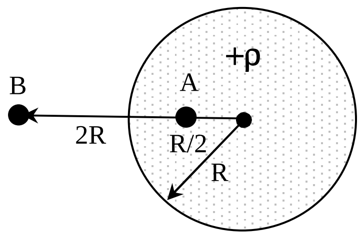
4. Dato un cilindro indefinito di raggio R=50cm uniformemente carico con densità volumetrica ρ=50μC/m^3 ed un filo concentrico anch'esso uniformemente carico con densità lineare λ=10μC/m determinate la differenza di potenziale tra i punti A e B a distanza rispettivamente R/2 e 2R dal filo.



4. La differenza di potenziale fra i punti A e B può calcolarsi singolarmente sia per il cilindro indefinito che per il filo indefinito. I risultati vanno quindi sommati per la legge di sovrapposizione degli effetti.

Calcolo di V_A-V_B per il cilindro uniformemente carico

Per il calcolo del campo elettrico si applica la legge di Gauss. Il flusso del campo elettrico uscente da una superficie cilindrica concentrica di raggio generico r e di altezza h assume l'espressione
$\Phi(\vec{E}_o) = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n}_{ext} dS = (2\pi r h) E_o = Q_{int}/\varepsilon_o$



dove $Q_{int} = \begin{cases} r < R & = \rho(\pi r^2 h) \\ r > R & = \rho(\pi R^2 h) \end{cases}$

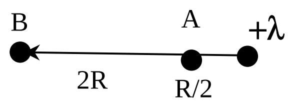
da cui il campo elettrico $\begin{cases} r < R & E_{int} = \rho r / 2\varepsilon_o \\ r > R & E_{ext} = \rho R^2 / 2\varepsilon_o r \end{cases}$

la differenza di potenziale vale quindi ove si è assunto nullo il potenziale all'infinito. La differenza di potenziale fra i punti B ed A assume quindi il valore

$$V_A - V_B = \int_{R/2}^{R} E_{int} dr + \int_{R}^{2R} E_{ext} dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} \int_{R/2}^{R} r dr + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \int_{R}^{2R} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} \frac{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln\left(\frac{2R}{R}\right) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left[\frac{3}{8} + \ln(2)\right]$$

$(V_A - V_B)_{cil} =$ **7.55 10^5 V**

Calcolo di V_A-V_B per il filo uniformemente carico



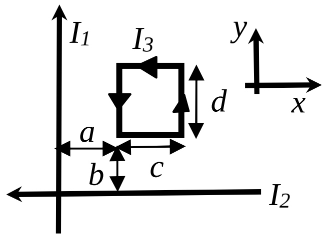
Il campo elettrico di un filo uniformemente carico è $E_{filo} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$

$(V_A - V_B)_{filo} = \int_{R/2}^{2R} E dr = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \int_{R/2}^{2R} \dfrac{dr}{r} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \ln 4 =$ **2.495 10^5 V**

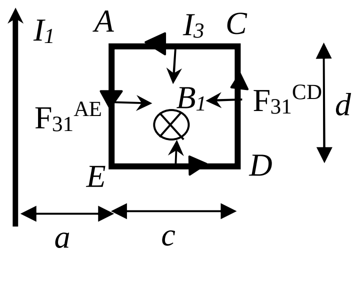
Applicando la legge di sovrapposizione degli effetti si ottiene

$V_A - V_B = (V_A - V_B)_{cil} + (V_A - V_B)_{filo} = \dfrac{1}{2\varepsilon_o}\left\{\dfrac{\lambda}{\pi} \ln 4 + \rho R^2 \left[\dfrac{3}{8} + \ln(2)\right]\right\} =$ **1.005 10^6 V**

5. Due fili infinitamente lunghi, paralleli all'asse y ed x, sono percorsi dalle correnti rispettivamente I_1, I_2. Una spira rettangolare di lati c,d giace nel piano formato dai due fili alle distanze da essi rispettivamente a,b, ed è percorsa dalla corrente I_3. Ipotizzando che la spira sia un corpo rigido, determinare l'espressione della forza totale agente sulla spira ad opera dei due fili rettilinei. In particolare calcolare per quale valore della corrente I_2 la forza ha la direzione della bisettrice del piano xy, e dare il valore numerico della forza. Dati [I_1=2A, I_3=3A, a=1cm, b=2cm, c=3cm, d=2cm]



5. La spira rettangolare ACDE è sottoposta a forze magnetiche interne ed esterne. Le forze magnetiche interne dovute al campo magnetico da essa stessa generato hanno risultante nulla e non danno alcun effetto alla spira rigida. Le forze magnetiche esterne sono quelle dovute ai campi magnetici B_1 generato dalla corrente I_1, e B_2 dalla I_2 e vanno calcolate su ciascun tratto della spira applicando la 2ª formula di Laplace.



Calcolo della forza $\vec{F}_{31}$ sulla spira ad opera del primo filo di corrente I_1

La forza complessiva F_{31} può pensarsi come la risultante delle 4 forze agenti sui 4 lati della spira rettangolare. 2 forze sui due lati AC ed ED sono uguali ed opposte e non danno alcun effetto.

Sul lato AE c'è una forza repulsiva diretta lungo l'asse x di valore $F_{31}^{AE} = B_1 I_3 d = \frac{\mu_o}{2\pi a} I_1 I_3 d$

maggiore della forza attrattiva sul lato CD, in senso opposto ad x, $F_{31}^{CD} = -B_1 I_3 d = -\frac{\mu_o}{2\pi(a+c)} I_1 I_3 d$.

La risultante sull'asse x vale quindi $F_{31} = \frac{\mu_o I_1 I_3}{2\pi} \frac{cd}{a(a+c)}$ =**1.8 10^{-6} N** attrattiva verso il primo filo.

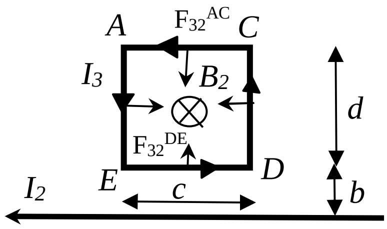
Calcolo della forza $\vec{F}_{32}$ sulla spira ad opera del secondo filo di corrente I_2

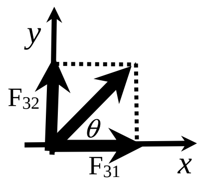
La forza complessiva F_{32} può pensarsi come la risultante delle 4 forze agenti sui 4 lati della spira rettangolare. 2 forze sui due lati AE ed CD sono uguali ed opposte e non danno alcun effetto.

Sul lato DE c'è una forza repulsiva diretta lungo l'asse y di valore $F_{32}^{DE} = B_2 I_3 c = \frac{\mu_o}{2\pi b} I_2 I_3 c$

maggiore della forza attrattiva sul lato AC, in senso opposto ad y, $F_{32}^{AC} = -B_2 I_3 c = -\frac{\mu_o}{2\pi(b+d)} I_2 I_3 c$.

La risultante sull'asse y vale quindi $F_{32} = \frac{\mu_o I_2 I_3}{2\pi} \frac{cd}{b(b+d)}$ è quindi attrattiva verso il primo filo.





Sommando le due forze relative ai due fili $\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$

la risultante totale sarà inclinata di θ=45° se

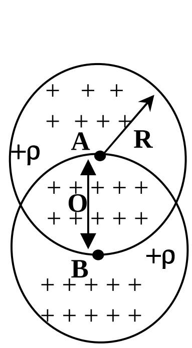
$F_{31} = F_{32}$ ossia $\frac{\mu_o I_1 I_3}{2\pi} \frac{cd}{a(a+c)} = \frac{\mu_o I_2 I_3}{2\pi} \frac{cd}{b(b+d)}$

che si verifica quando $I_2 = I_1 \frac{b(b+d)}{a(a+c)} = 2I_1 =$ **4A**

La forza complessiva diretta lungo la bisettrice varrà $R = \sqrt{2} F_{31} =$ **2.55 10^{-6} N**

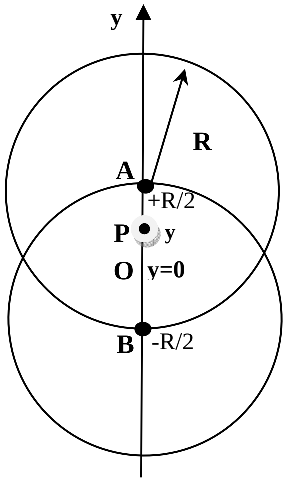
ESERCIZI SOSTITUTIVI
PER IL 2° ESONERO DI ELETTROMAGNETISMO

2. Due cilindri di lunghezza infinita di sezione circolare di raggio R=1m sono paralleli e compenetrati l'uno nell'altro in modo che la distanza fra i due centri A e B sia uguale al raggio R. La distribuzione uniforme di carica vale per entrambi +ρ=100µC/m^3. All'interno nel punto A si trova un elettrone, inizialmente fermo. Descrivere il tipo di moto cui è soggetto l'elettrone, calcolare la velocità con cui esso passa per il punto di equilibrio O ed il periodo del moto periodico risultante sul tratto AB [la massa dell'elettrone m_e=9.1·10^{-31} kg; la carica dell'elettrone: –e = -1.6 ·10^{-19} C]



2. Applicando la legge di Gauss, come dimostrato in un precedente esercizio, si ricava l'espressione del campo elettrostatico all'interno di un cilindro uniformemente carico: $E_{int} = \rho r / 2\varepsilon_o$. Il tratto rettilineo AOB percorso dall'elettrone si trova nella regione di sovrapposizione tra i cilindri, ed il campo elettrico in un generico punto P su AOB si ottiene, con il principio di sovrapposizione degli effetti, sommando i campi elettrici generati da ciascun cilindro:

Il campo generato in P dal cilindro alto è $E_y^{(1)} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_o} AP = -\frac{\rho}{2\varepsilon_o}\left(\frac{R}{2} - y\right)$



Il campo generato in P dal cilindro basso è $E_y^{(2)} = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} BP = \frac{\rho}{2\varepsilon_o}\left(\frac{R}{2} + y\right)$

il campo complessivo in P è quindi $E_y = E_y^{(1)} + E_y^{(2)} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} y$

la forza agente sull'elettrone $F_y = -eE_y = -\frac{e\rho}{\varepsilon_o} y = ma_y = m\frac{d^2 y}{dt^2}$

Il moto risultante sull'asse y è quello armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{e\rho}{m\varepsilon_o}}$,

e **periodo** $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\varepsilon_o}{e\rho}} =$ **4.46 ns**

Nel moto armonico le grandezze cinematiche sono in generale $\begin{cases} y = A\cos(\omega t + \phi) \\ v_y = -A\omega\sin(\omega t + \phi) \end{cases}$

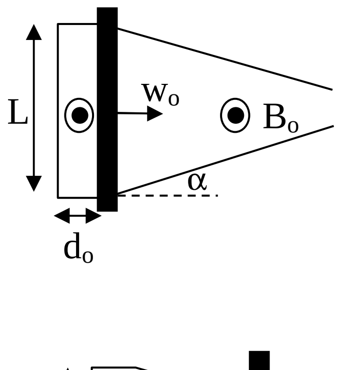
dalle condizioni iniziali si ottiene $\begin{cases} y(0) = A\cos(\phi) = R/2 \\ v_y(0) = -A\omega\sin(\phi) = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} A = R/2 \\ \phi = 0 \end{cases}$

e le grandezze cinematiche divengono quindi $\begin{cases} y = \frac{R}{2}\cos(\omega t) \\ v_y = -\frac{R}{2}\sqrt{\frac{e\rho}{m\varepsilon_o}}\sin(\omega t) \end{cases}$

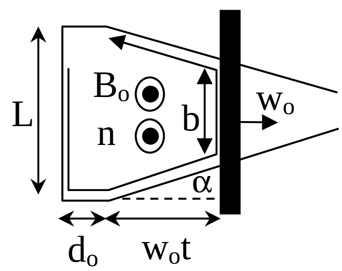
La velocità massima è raggiunta nel punto O ed ha valore $v_{\max} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{e\rho}{m\varepsilon_o}} =$ **7 10^{8} m/s**

(Commento: tale valore è superiore alla velocità della luce. La trattazione deve essere quindi modificata tenendo in conto delle correzioni relativistiche, che non sono però state trattate nel corso)

5. Una barretta cilindrica di resistenza elettrica R=20Ω può scorrere su contatti elettrici striscianti disposti, sul piano orizzontale, su due guide metalliche convergenti con inclinazione α come riportato in figura. Assumendo che il moto della barretta sia forzato ad essere rettilineo uniforme con velocità w_o=3m/s, e che sia presente un vettore induzione magnetica verticale uniforme di valore B_o=0.1 T, determinare il verso e l'andamento temporale della corrente indotta nel circuito e calcolare il suo valore dopo t=3ms [Dati: L=3cm, α=10°. Si trascurino i fenomeni di autoinduzione]



5. Scelto il verso di percorrenza del circuito elettrico come indicato in figura, il vettore induzione magnetica $\mathbf{B_o}$ risulta equiverso alla normale **n** del dominio sul quale viene calcolato il flusso conacatenato. Il flusso vale quindi



$$\Phi_c = \iint \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = B_o \iint dS = B_o S$$

dove la superficie complessiva S si ottiene sommando l'area del rettangolo iniziale **$S_o=d_oL$**, all'area del trapezio **$S_{trap}=(L+b)w_ot/2$** ove la base minore vale **$b=L-2\,w_ot\,tg\alpha$**
L'area totale è quindi data dalla relazione **$S=S_o+S_{trap}=d_oL+(L-w_ot\,tg\alpha)w_ot$**

La **forza elettromotrice indotta** vale quindi $f_i=-\dfrac{d\Phi_c}{dt}=-B_o\dfrac{dS}{dt}=-B_ow_o\left(L-2w_ot\quad tg\alpha\right)$

L'andamento temporale della **corrente indotta** è $i=\dfrac{f_i}{R}=\dfrac{-B_ow_o}{R}\left(L-2w_ot\quad tg\alpha\right)$

che calcolata al tempo t*=3ms dà luogo alla **corrente indotta** **i(t*)= - 0.402 mA** circolante quindi nel verso opposto a quello indicato in figura.