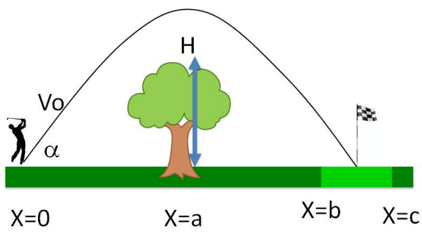
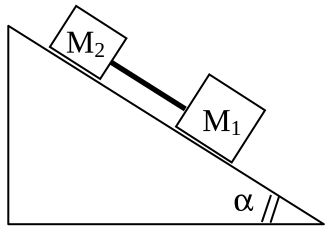
FISICA

A.A. 2013-2014
Ingegneria Gestionale
1° appello del 23 Giugno 2014
Esame completo

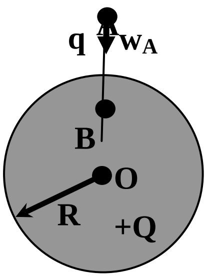
1. Un giocatore di golf deve lanciare la pallina il più vicino possibile alla buca ad una distanza compresa tra b=100m e c=110m dal punto di battuta. Nel percorso ad una distanza a=50m dalla battura è presente un grande albero di altezza H=30m che costituisce un impedimento. Il giocatore ha a disposizione tre mazze in grado di imprimere alla palla una inclinazione a scelta (α_1=20°, α_1=45°, α_1=50°) determinare quale mazza è utilizzabile e quali sono le velocità minima e massima da imprimere inizialmente per entrare sicuramente nella zona b<x<c.



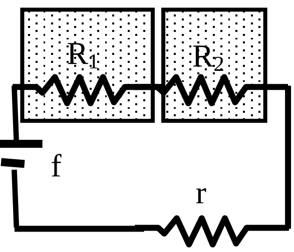
2. Due corpi di massa M_1=2Kg ed M_2=1Kg scivolano lungo un piano scabro inclinato di a=30° rispetto ad un piano orizzontale. Essi sono uniti tra loro da un'asta rigida di massa trascurabile parallela al piano inclinato. Il coefficiente di attrito dinamico del corpo 1 vale μ_{d1}=0.15, quello del corpo 2 vale μ_{d2}=0.20. Calcolare la tensione dell'asta che collega i due corpi e l'accelerazione comune cui sono sottoposti i due corpi.



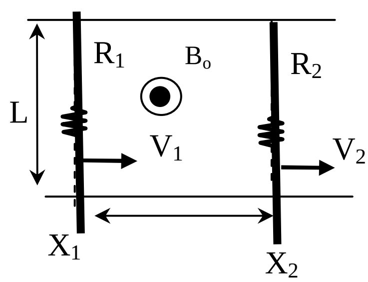
3. All'interno di una sfera di centro O e di raggio R=10 cm è presente una carica Q=100μC distribuita uniformemente. Una piccola carica di prova q=1μC di massa m=1g viene posizionata in A (alla distanza r_A=20 cm calcolata rispetto ad O) e lanciata con velocità w_A=6*10^{-4} m/s. Determinare la posizione del punto B (distanza r_B calcolata rispetto ad O) in cui la carica si ferma ed inverte il suo moto.



3. Il dispositivo in figura si compone di un circuito resistivo alimentato da una forza elettromotrice f=10kV. I due resistori principali R_1=7.5 kΩ, R_2=2 kΩ, sono utilizzati come scaldatori per aumentare la temperatura di due bollitori contenenti rispettivamente M_1=1kg e M_2=2kg di acqua distillata. La resistenza interna del circuito r=500 Ω tiene in conto di tutti gli effetti resistivi di fili e generatore. Determinare dopo quanti secondi la massa M_1 contenuta nel primo bollitore si porta dalla temperatura ambiente di 20°C (cui si trova inizialmente l'intero sistema) alla temperatura di 80°C. Determinare a quell'istante a quale temperatura si viene a trovare la massa d'acqua M_2 nel secondo bollitore (calore specifico acqua C=4187 J/kg, si trascurino le perdite termiche nei bollitori)



5. Una barretta metallica conduttrice di lunghezza L=15cm e resistenza elettrica R_1=5Ω e massa m_1=10g viene spinta lungo binari conduttori orizzontali, senza attrito e di resistenza trascurabile alla velocità costante v_o=5m/s. Nella regione in cui si muove la barretta è presente un campo magnetico uniforme verticale di induzione B_o=2T. Più avanti è disposta una seconda barretta di medesime caratteristiche ma inizialmente ferma a 10m. Determinare la velocità acquistata dalla seconda barretta in seguito all'induzione e la corrente che scorre nel circuito. Dare il valore numerico dopo t=1s.



FISICA

A.A. 2013-2014

Ingegneria Gestionale

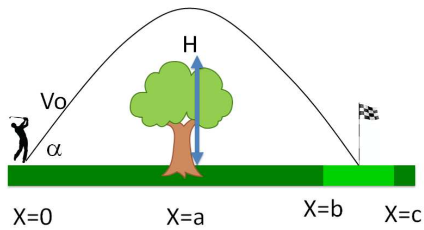
1° appello del 23 Giugno 2014

1. Equazioni della cinematica. Le grandezze cinematiche vengono scomposte secondo gli assi x,y

Lungo l'asse x $\begin{cases} x(t) = v_o \cos(\alpha) \cdot t \\ v_x(t) = v_o \cos(\alpha) \\ a_x = 0 \end{cases}$, e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = v_o \sin(\alpha) \cdot t - gt^2/2 \\ v_y(t) = v_o \sin(\alpha) - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Calcolo della gittata:

il tempo di volo si ottiene imponendo y(t*)=0 da cui $t^* = \dfrac{2v_o \sin(\alpha)}{g}$



la gittata L si ottiene dalla

$$L = x(t^*) = v_o t^* \cos\alpha = \frac{2v_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_o^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

Condizione sulle velocità per atterraggio prossimo alla buca:

$$b \le L = \frac{v_o^2 \sin(2\alpha)}{g} \le c \quad \text{da cui} \quad \sqrt{\frac{gb}{\sin(2\alpha)}} \le v_o \le \sqrt{\frac{gc}{\sin(2\alpha)}} \qquad \textbf{(diseq.1)}$$

Equazione della traiettoria:

dalla equazione x(t) si esplicita il tempo $t = \dfrac{x}{v_o \cos\alpha}$ che si sostituisce nell'equazione y(t)

in modo da determinare l'equazione della traiettoria parabolica $y = tg\alpha \cdot x - \left(\dfrac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha}\right) x^2$

Condizione sulla velocità per superare l'ostacolo:

$$y(a) = tg\alpha \cdot a - \left(\frac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha}\right) a^2 \ge H \quad \text{da cui} \quad v_o \ge \frac{a}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(a \cdot tg\alpha - H)}} \quad \text{insieme con} \quad tg\alpha \ge \frac{H}{a} \qquad \textbf{(diseq.2)}$$

Riepilogo sull'uso delle mazze: l'unica mazza utilizzabile è la terza con alzo α_3=50°

alzo	diseq.1	diseq.2	commento
α_1=20°	39.0 m/s $\le v_o \le$ 40.9 m/s	mai	la palla sbatte sempre contro ostacolo
α_2=45°	31.3 m/s $\le v_o \le$ 32.8 m/s	$v_o \ge$ 35 m/s	la palla va lunga per superare l'ostacolo
α_3=50°	31.5 m/s $\le v_o \le$ 33.1 m/s	$v_o \ge$ 31.6 m/s	Ok se **31.6 m/s $\le v_o \le$ 33.1 m/s**

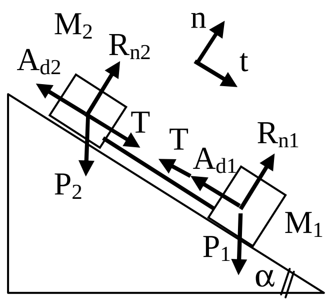
2. Le forze agenti su ciascuna massa sono le seguenti

a) la forza peso $P=Mg$ diretta lungo la verticale

b) la reazione normale R_n lungo la normale n.

c) la forza di attrito dinamico A_d lungo l'asse tangenziale t.

d) la tensione dell'asta T lungo l'asse tangenziale t.



Scomponendo le forze secondo gli assi *n*,*t*

Per la massa M_1

$$\begin{matrix} \hat{n} \\ \hat{t} \end{matrix} \begin{cases} R_{n1} - P_1 \cos\alpha = 0 \\ P_1 \sin\alpha - A_{d1} - T = M_1 a \end{cases}$$

Per la massa M_2

$$\begin{matrix} \hat{n} \\ \hat{t} \end{matrix} \begin{cases} R_{n2} - P_2 \cos\alpha = 0 \\ P_2 \sin\alpha - A_{d2} + T = M_2 a \end{cases}$$

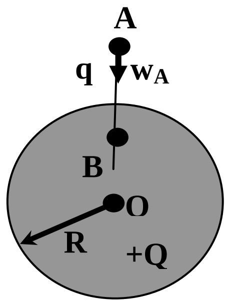
Sommando le 2 equazioni lungo t si ottiene $\left(M_1+M_2\right)a=\left(P_1+P_2\right)\sin\alpha-\left(A_{d1}+A_{d2}\right)$,

da cui $\quad a=g\left[\sin\alpha-\cos\alpha\left(\dfrac{\mu_{d1}M_1+\mu_{d2}M_2}{M_1+M_2}\right)\right]$=3.485 m/s^2

sostituendo nella seconda il valore trovato dell'accelerazione

$$T=M_2\left(a-g\sin\alpha\right)+A_{d2}=\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}g\cos\alpha\left(\mu_{d2}-\mu_{d1}\right)=0.283\text{ N}$$

3. La carica q è lanciata in A con la velocità w_A in modo da raggiungere il punto B di inversione del moto con energia cinetica trascurabile. Imponendo la conservazione dell'energia tra il punto di partenza A e quello incognito di arrivo B si ottiene la relazione



$$T_A+qV_A=qV_B \quad \text{da cui} \quad V_B\left(r_B\right)-V_A=\frac{T_A}{q}=\frac{mw_A^2}{2q} \qquad \textbf{(1)}$$

La differenza di potenziale è d'altra parte calcolabile mediante la legge di Gauss. Applicando la legge di Gauss ad una superficie sferica concentrica Σ

$$\Phi_\Sigma=\int_\Sigma \vec{E}_o\cdot\hat{n}dS=4\pi r^2E_o\left(r\right)=Q_{int}/\varepsilon_o \quad \text{dove} \quad Q_{int}=\begin{cases} r<R & \rho V_{int}=\rho\,4\pi r^3/3=Q\left(r^3/R^3\right)\\ r>R & Q\end{cases}$$

da cui si ricava il campo elettrico interno ed esterno alla sfera $E=\begin{cases} r<R & E_{int}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{r}{R^3}\\ r>R & E_{ext}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{1}{r^2}\end{cases}$

La differenza di potenziale tra i punti B,A si calcola integrando il campo elettrico

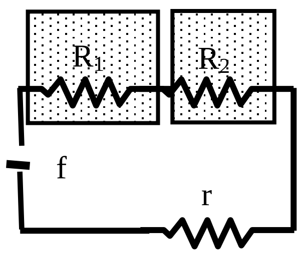
$$V_B-V_A=\int_{r_B}^{R}E_{int}dr+\int_{R}^{r_A}E_{ext}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{R^2-r_B^2}{2R^3}+\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}\right)\right\}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{3R^2-r_B^2}{2R^3}-\frac{1}{r_A}\right\} \qquad \textbf{(2)}$$

Combinando le due equazioni ed esplicitando la posizione del punto incognito B

$r_B=\sqrt{3R^2-2R^3\left[\left(4\pi\varepsilon_o\right)\dfrac{mw_A^2}{2qQ}+\dfrac{1}{r_A}\right]}=$ **14.1 cm** (ma $r_B>R$ non accettabile. L'ipotesi che punto B fosse interno viene smentita. La carica q non riesce ad entrare nella sfera di raggio R. Ed è necessario ripetere il calcolo della differenza di potenziale V_A-V_B ipotizzando B esterno)

$$V_B-V_A=\int_{r_B}^{r_A}E_{ext}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) \quad \text{che con Eq.1 dà luogo a} \quad r_B=\left[\left(4\pi\varepsilon_o\right)\frac{mw_A^2}{2qQ}+\frac{1}{r_A}\right]^{-1}\cong \mathbf{20\ cm}$$

4. Il circuito elettrico formato da una sola maglia



la **intensità di corrente elettrica** vale $I=\dfrac{f}{r+R_1+R_2}=$ **1A**

La **potenza dissipata** per effetto Joule sulle resistenze

$$P_1 = I^2 R_1 = \frac{f^2 R_1}{(r + R_1 + R_2)^2} = \mathbf{7.5\ kW;} \quad P_2 = I^2 R_2 = \frac{f^2 R_2}{(r + R_1 + R_2)^2} = \mathbf{2\ kW;}$$

Il **calore sviluppato** in un tempo $\boldsymbol{\tau}$ nei due bollitori è quindi

$$Q_1 = P_1 \tau = \frac{f^2 R_1}{(r + R_1 + R_2)^2} \tau \quad ; \quad Q_2 = P_2 \tau = \frac{f^2 R_2}{(r + R_1 + R_2)^2} \tau \qquad \text{in rapporto} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

Il calore necessario per portare il primo bollitore alla temperatura T_1=80°C si ottiene dalla equazione calorimetrica

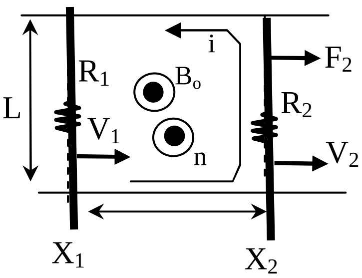
$Q_1 = M_1 C (T_1 - T_{amb})$ **= 251 kJ** da cui il tempo che è necessario attendere è quindi **τ=Q_1/P_1= 33.5 s**

Dal raffronto tra i calori sviluppati tra i due bollitori $\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{M_2 C (T_2 - T_{amb})}{M_1 C (T_1 - T_{amb})}$

si ottiene la temperatura del secondo bollitore al tempo τ: $\quad T_2 = T_{amb} + \left(\dfrac{M_1 R_2}{M_2 R_1} \right) (T_1 - T_{amn}) = \mathbf{28°C}$

5. Dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, si calcola il flusso concatenato con la spira Φ_c:

$$\Phi_c = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int B dS = B_o \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^L dy = B_o L [x_2(t) - x_1(t)]$$



Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -B_o L \frac{d}{dt} [x_2(t) - x_1(t)] = -B_o L (V_2 - V_1)$$

l'intensità di corrente indotta nel circuito $\; i(t) = \dfrac{f_i}{R_1 + R_2} = \dfrac{B_o \cdot L}{R_1 + R_2} [V_1 - V_2]$ (nel senso in figura)

e con la 2ª di Laplace la forza sulla barretta $\; F_2 = iLB_o = \dfrac{(B_o \cdot L)^2}{R_1 + R_2} [V_1 - V_2]$ (nel senso in figura)

Tale forza produce una accelerazione $\; F_2 = m_2 a_2 = m_2 \dfrac{dV_2}{dt}$.

Combinando le equazioni si ottiene l'equazione $\; \dfrac{dV_2}{dt} + \dfrac{B_o^2 L^2}{m_2 (R_1 + R_2)} V_2 = \dfrac{B_o^2 L^2}{m_2 (R_1 + R_2)} V_1$

Con soluzione generale $\; V_2 = A \exp(-t/\tau) + V_1 \;$ ove $\; \tau = \dfrac{m_2 (R_1 + R_2)}{B_o^2 L^2} = \dfrac{2mR}{B_o^2 L^2} = \mathbf{1.11\ s}$

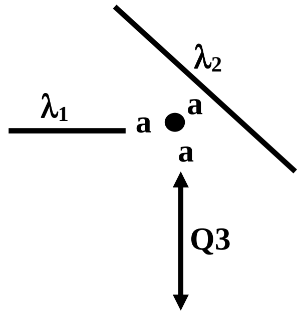
Il valore di A= -V_1 si trova imponendo che la seconda barretta sia inizialmente ferma

da cui **la velocità** $\; V_2 = V_1 [1 - \exp(-t/\tau)] \;$ **e la corrente** $\; i(t) = \dfrac{B_o \cdot L}{R_1 + R_2} [V_1 - V_2] = \dfrac{B_o L V_1}{2R} \exp(-t/\tau)$

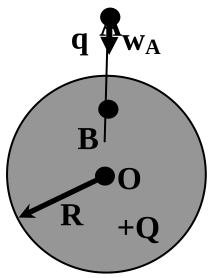
I valori numerici dopo t=1s sono rispettivamente $\; V_2(t = 1s) = \mathbf{2.97\ m/s}$ **,** $\; i(t = 1s) = \mathbf{61mA}$

FISICA

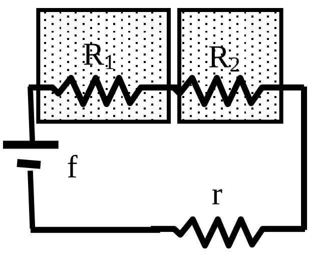
A.A. 2013-2014
Ingegneria Gestionale
SECONDO ESONERO
1° appello del 23 Giugno 2014



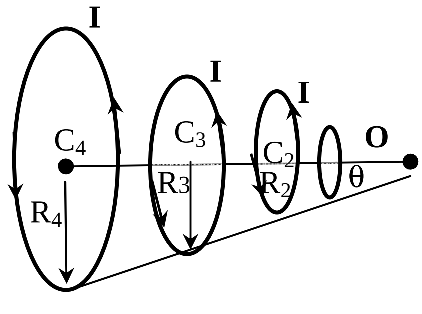
1. Su di una semiretta orizzontale viene posizionata una distribuzione lineare uniforme di carica elettrica di valore λ_1=10μC/m. Su di una retta obliqua inclinata di 45° rispetto all'orizzontale è invece presente una distribuzione lineare uniforme λ_2. Infine una terza carica Q_3=5 μC è distribuita su di un segmento verticale di lunghezza L incognita come indicato in figura. Sapendo che nel punto O posizionato alla stessa distanza da tutte le tre sorgenti (a=10cm) si verifica una condizione di assenza di campo elettrico, determinare il valore incognito della distribuzione λ_2 e della lunghezza L del segmento.



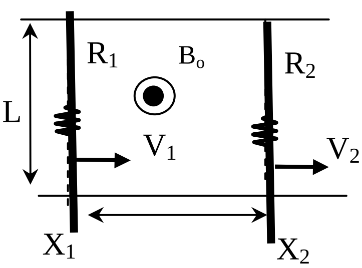
2. All'interno di una sfera di centro O e di raggio R=10 cm è presente una carica Q=100μC distribuita uniformemente. Una piccola carica di prova q=1μC di massa m=1g viene posizionata in A (alla distanza r_A=20 cm calcolata rispetto ad O) e lanciata con velocità $w_A=6*10^{-4}$ m/s. Determinare la posizione del punto B (distanza r_B calcolata rispetto ad O) in cui la carica si ferma ed inverte il suo moto.



3. Il dispositivo in figura si compone di un circuito resistivo alimentato da una forza elettromotrice f=10kV. I due resistori principali R_1=7.5 kΩ, R_2=2 kΩ, sono utilizzati come scaldatori per aumentare la temperatura di due bollitori contenenti rispettivamente M_1=1kg e M_2=2kg di acqua distillata. La resistenza interna del circuito r=500 Ω tiene in conto di tutti gli effetti resistivi di fili e generatore. Determinare dopo quanti secondi la massa M_1 contenuta nel primo bollitore si porta dalla temperatura ambiente di 20°C (cui si trova inizialmente l'intero sistema) alla temperatura di 80°C. Determinare a quell'istante a quale temperatura si viene a trovare la massa d'acqua M_2 nel secondo bollitore (calore specifico acqua C=4187 J/kg, si trascurino le perdite termiche nei bollitori)



4. Quattro spire circolari sono disposte come in figura e percorse dalla medesima corrente I=2mA. Le spire disposte su piani paralleli hanno centri equamente spaziati sull'asse orizzontale in modo che la distanza sia $OC_n=n*\Delta x$ con n=1,2,3,4 e Δx=1cm. I raggi delle spire crescono proporzionalmente con la distanza con legge $R_n=OC_n*\tan(\theta)$ così da essere tangenti al cono con vertice in O ed angolo di semiapertura θ=30°. Calcolare il vettore induzione nel vertice O del cono.



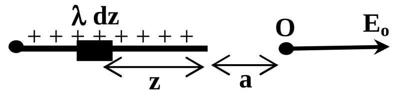
5. Una barretta metallica conduttrice di lunghezza L=15cm e resistenza elettrica R_1=5Ω e massa m_1=10g viene spinta lungo binari conduttori orizzontali, senza attrito e di resistenza trascurabile alla velocità costante v_o=5m/s. Nella regione in cui si muove la barretta è presente un campo magnetico uniforme verticale di induzione B_o=2T. Più avanti è disposta una seconda barretta di medesime caratteristiche ma inizialmente ferma a 10m. Determinare la velocità acquistata dalla seconda barretta in seguito all'induzione e la corrente che scorre nel circuito. Dare il valore numerico dopo t=1s.

FISICA

A.A. 2013-2014
Ingegneria Gestionale
SECONDO ESONERO
1° appello del 23 Giugno 2014

1. Campo elettrico generato da un tratto rettilineo lungo la direzione longitudinale

Il campo elettrico elementare è $dE = \dfrac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_o (z+a)^2}$

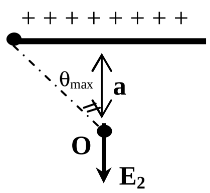


ed integrando $E_0 = \int dE = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\displaystyle\int_0^L \dfrac{dz}{(z+a)^2} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\dfrac{1}{z+a}\right]_0^L = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left[\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+L}\right] = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o a(a+L)}$

Nel caso quindi della terza distribuzione il campo vale $E_3 = \dfrac{Q_3}{4\pi\varepsilon_o a(a+L)}$

Nel caso della prima distribuzione, essendo L infinito, il campo vale $E_1 = \dfrac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o a}$

Campo elettrico generato da un tratto rettilineo lungo la mediana

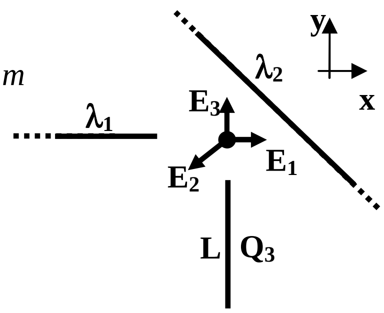


Sfruttando le simmetrie si può dimostrare che il campo elettrico lungo la mediana

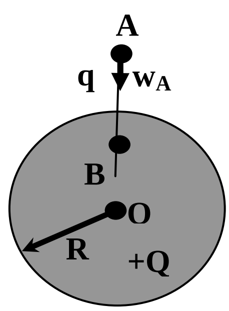
$$E_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o a}\sin\theta_{\max} = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o a}\frac{L}{\sqrt{a+L^2}} = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o a}$$ quando il filo è infinito

Proiettando i campi elettrici lungo gli assi x,y ed imponendo annullamento del campo

$$\begin{cases} x) \quad E_1 - E_2\cos(45°) = 0 \\ y) \quad E_3 - E_2\sin(45°) = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} E_2 = E_1\sqrt{2} \\ E_3 = E_1 \end{cases} \quad \text{ssia} \quad \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1/\sqrt{2} = 7.07\,\mu C/m \\ L = Q_3/\lambda_1 - a = 40cm \end{cases}$$



2. La carica q è lanciata in A con la velocità w_A in modo da raggiungere il punto B di inversione del moto con energia cinetica trascurabile. Imponendo la conservazione dell'energia tra il punto di partenza A e quello incognito di arrivo B si ottiene la relazione



$$T_A + qV_A = qV_B \quad \text{da cui} \quad V_B(r_B) - V_A = \frac{T_A}{q} = \frac{mw_A^2}{2q} \quad \textbf{(1)}$$

La differenza di potenziale è d'altra parte calcolabile mediante la legge di Gauss.
Applicando la legge di Gauss ad una superficie sferica concentrica Σ

$$\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r) = Q_{int}/\varepsilon_o \quad \text{dove} \quad Q_{int} = \begin{cases} r < R \quad \rho V_{int} = \rho 4\pi r^3/3 = Q(r^3/R^3) \\ r > R \quad Q \end{cases}$$

da cui si ricava il campo elettrico interno ed esterno alla sfera $E = \begin{cases} r < R \quad E_{\text{int}} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{r}{R^3} \\ r > R \quad E_{ext} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{1}{r^2} \end{cases}$

La differenza di potenziale tra i punti B,A si calcola integrando il campo elettrico

$$V_B - V_A = \int_{r_B}^{R} E_{\text{int}} dr + \int_{R}^{r_A} E_{ext} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{R^2 - r_B^2}{2R^3} + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_A}\right)\right\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{3R^2 - r_B^2}{2R^3} - \frac{1}{r_A}\right\} \quad \textbf{(2)}$$

Combinando le due equazioni ed esplicitando la posizione del punto incognito B

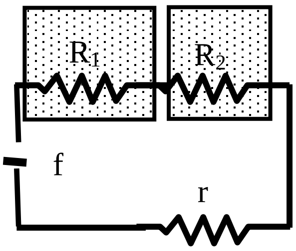
$r_B = \sqrt{3R^2 - 2R^3\left[(4\pi\varepsilon_o)\dfrac{mw_A^2}{2qQ} + \dfrac{1}{r_A}\right]} = \mathbf{14.1\ cm}$ (ma $r_B > R$ non accettabile. L'ipotesi che punto B fosse interno viene smentita. La carica q non riesce ad entrare nella sfera di raggio R. Ed è necessario ripetere il calcolo della differenza di potenziale V_A-V_B ipotizzando B esterno)

$V_B - V_A = \displaystyle\int_{r_B}^{r_A} E_{ext} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$ che con Eq.1 dà luogo a $r_B = \left[(4\pi\varepsilon_o)\dfrac{mw_A^2}{2qQ} + \dfrac{1}{r_A}\right]^{-1} \cong \mathbf{20\ cm}$

3. Il circuito elettrico formato da una sola maglia

la **intensità di corrente elettrica** vale $I = \dfrac{f}{r + R_1 + R_2} = \mathbf{1A}$

La **potenza dissipata** per effetto Joule sulle resistenze



$$P_1 = I^2 R_1 = \frac{f^2 R_1}{(r + R_1 + R_2)^2} = \mathbf{7.5\ kW;} \quad P_2 = I^2 R_2 = \frac{f^2 R_2}{(r + R_1 + R_2)^2} = \mathbf{2\ kW;}$$

Il **calore sviluppato** in un tempo **τ** nei due bollitori è quindi

$$Q_1 = P_1\tau = \frac{f^2 R_1}{(r + R_1 + R_2)^2}\tau \quad ; \quad Q_2 = P_2\tau = \frac{f^2 R_2}{(r + R_1 + R_2)^2}\tau \qquad \text{in rapporto} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

Il calore necessario per portare il primo bollitore alla temperatura T_1=80°C si ottiene dalla equazione calorimetrica

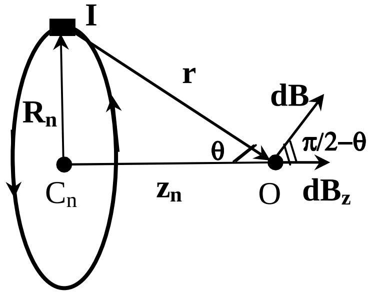
$Q_1 = M_1 C(T_1 - T_{amb}) = \mathbf{251\ kJ}$ da cui il tempo che è necessario attendere è quindi **$\tau = Q_1/P_1$ = 33.5 s**

Dal raffronto tra i calori sviluppati tra i due bollitori $\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{M_2 C(T_2 - T_{amb})}{M_1 C(T_1 - T_{amb})}$

si ottiene la temperatura del secondo bollitore al tempo τ: $T_2 = T_{amb} + \left(\dfrac{M_1 R_2}{M_2 R_1}\right)(T_1 - T_{amn}) = \mathbf{28°C}$

4. Calcolo del vettore induzione magnetica generato dalla n-esima spira circolare

Ai fini del calcolo dell'induzione magnetica in O si applica la 1ª formula di Laplace all'elemento sorgente Idl della n-esima spira centrata su C_n



$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{da cui il modulo} \quad dB = \frac{\mu_o I dl}{4\pi r^2}$$

per ragioni di simmetria il contributo efficace nel punto O va però proiettato lungo l'asse z

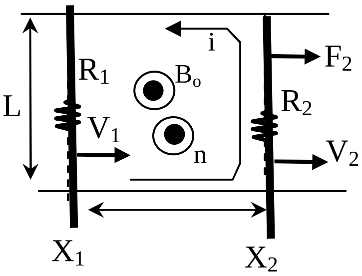
$$dB_z = dB\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\mu_o I dl}{4\pi r^2}\sin\theta \qquad \text{che integrata su tutta la spira}$$

$$B_n = \oint dB_z = 2\pi R_n \frac{\mu_o I}{4\pi r^2}\sin\theta = \frac{\mu_o I}{2}\frac{R_n}{R_n^2 + z_n^2}\sin\theta = \frac{\mu_o I}{2}\frac{z_n tg\theta}{z_n^2\left(1+tg^2\theta\right)}\sin\theta = \frac{\mu_o I}{2z_n}\sin^2\theta\cos\theta$$

Sommando i contributi delle quattro spire infine si ottiene l'induzione complessiva in O

$$B_{tot} = \sum_n B_n = \left(\frac{\mu_o I}{2\Delta x}\sin^2\theta\cos\theta\right)\cdot\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n} = \frac{25}{24}\frac{\mu_o I}{\Delta x}\sin^2\theta\cos\theta = \mathbf{56.7\ nT}$$

5. Dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, si calcola il flusso concatenato con la spira Φ_c:



$$\Phi_c = \int \vec{B}\cdot\hat{n}dS = \int BdS = B_o\int_{x_1}^{x_2}dx\int_0^L dy = B_o L\left[x_2(t) - x_1(t)\right]$$

Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -B_o L\frac{d}{dt}\left[x_2(t) - x_1(t)\right] = -B_o L\left(V_2 - V_1\right)$$

l'intensità di corrente indotta nel circuito $i(t) = \frac{f_i}{R_1 + R_2} = \frac{B_o \cdot L}{R_1 + R_2}\left[V_1 - V_2\right]$ (nel senso in figura)

e con la 2ª di Laplace la forza sulla barretta $F_2 = iLB_o = \frac{\left(B_o \cdot L\right)^2}{R_1 + R_2}\left[V_1 - V_2\right]$ (nel senso in figura)

Tale forza produce una accelerazione $F_2 = m_2 a_2 = m_2\frac{dV_2}{dt}$.

Combinando le equazioni si ottiene l'equazione $\frac{dV_2}{dt} + \frac{B_o^2 L^2}{m_2\left(R_1 + R_2\right)}V_2 = \frac{B_o^2 L^2}{m_2\left(R_1 + R_2\right)}V_1$

Con soluzione generale $V_2 = A\exp\left(-t/\tau\right) + V_1$ ove $\tau = \frac{m_2\left(R_1 + R_2\right)}{B_o^2 L^2} = \frac{2mR}{B_o^2 L^2} = \mathbf{1.11\ s}$

Il valore di A= $-V_1$ si trova imponendo che la seconda barretta sia inizialmente ferma

da cui **la velocità** $V_2 = V_1\left[1 - \exp\left(-t/\tau\right)\right]$ **e la corrente** $i(t) = \frac{B_o \cdot L}{R_1 + R_2}\left[V_1 - V_2\right] = \frac{B_o L V_1}{2R}\exp\left(-t/\tau\right)$

I valori numerici dopo t=1s sono rispettivamente $V_2(t = 1s) = \mathbf{2.97\ m/s}$, $i(t = 1s) = \mathbf{61mA}$