



# FISICA

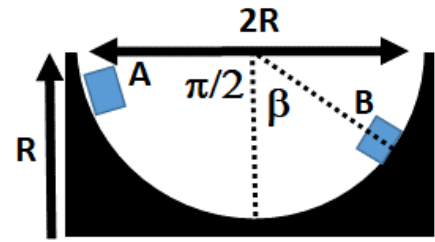
A.A. 2020-2021

Ingegneria Gestionale

4° appello del 21 Giugno 2021

Esame completo - Soluzioni

**1. Testo.** Una guida liscia ha un profilo semicircolare di raggio  $R=5\text{m}$ . Un blocco inizialmente fermo di massa  $M_A=2\text{kg}$  è appoggiato sulla guida ad una altezza  $R$  come indicato in figura nel punto A. Il blocco scivola senza attrito lungo la guida urtando centralmente ed elasticamente un blocco  $M_B=3\text{kg}$  fermo nel punto B che si trova nella guida ad una inclinazione  $\beta=30^\circ$  rispetto alla verticale. Determinare la velocità impressa al bocco  $M_B$  dopo l'urto e la quota massima cui giungerà. Determinare anche il valore che avrebbe dovuto avere la massa  $M_B$  per aumentare la velocità impressa  $V_B$  del 10%, calcolando in questo caso la nuova altezza finale raggiunta dal blocco  $M_B$



## 1. Soluzione. Calcolo della velocità nel punto B

Tale calcolo si effettua applicando il principio di conservazione energia meccanica durante il moto di  $M_A$  che parte dal punto A (figura 1) per urtare l'altro blocco in B (figura 2).

Energia meccanica iniziale del blocco  $M_A$  nel punto (1)

$$E_1 = U_1 = M_A g R$$

Energia meccanica finale del blocco  $M_A$  nel punto (2)

$$E_2 = U_2 + K_2 = M_A g R (1 - \cos \beta) + \frac{1}{2} M_A v_A^2$$

Imponendo la conservazione dell'energia  $E_2 = E_1$  si ottiene la velocità precedente all'urto  $v_A$

$$\frac{1}{2} M_A v_A^2 = M_A g R \cos \beta \quad \text{da cui} \quad v_A = \sqrt{2gR \cos \beta} = 9.21 \text{ m/s}$$

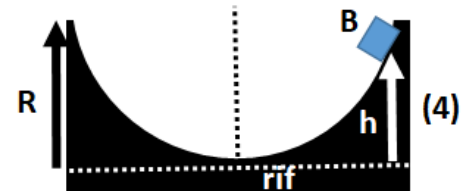
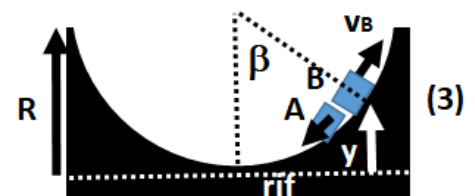
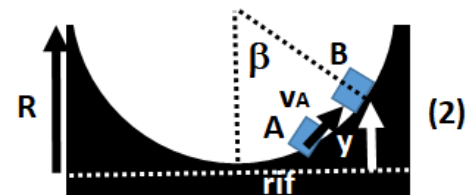
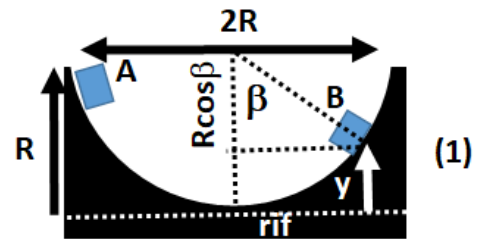
### Urto normale centrale elastico

La velocità dopo l'urto del blocco  $M_B$  inizialmente fermo. Si ottiene applicando la conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto del sistema. Risolvendo il sistema di due equazioni in due incognite si ottiene:

$$V_B = \left( \frac{2M_A}{M_A + M_B} \right) v_A = \left( \frac{2M_A}{M_A + M_B} \right) \sqrt{2gR \cos \beta} = 7.37 \text{ m/s}$$

### Calcolo della altezza h massima raggiunta dal blocco $M_B$

Tale calcolo si effettua applicando il principio di conservazione energia meccanica durante il moto di  $M_B$  che parte dal punto B (figura 3) per giungere alla massima quota h (figura 4).



Energia meccanica iniziale del blocco  $M_B$  nel punto (3)

$$E_3 = U_3 + K_3 = M_B g R (1 - \cos \beta) + \frac{1}{2} M_B V_B^2$$

Energia meccanica finale del blocco  $M_B$  nel punto (4)

$$E_4 = U_4 = M_B g h$$

Imponendo la conservazione dell'energia  $E_4 = E_3$  si determina la massima altezza  $h$  come segue

$$h = R(1 - \cos \beta) + \frac{V_B^2}{2g} = R(1 - \cos \beta) + \frac{4M_A^2}{(M_A + M_B)^2} R \cos \beta = R \left[ 1 - \cos \beta \left( 1 - \frac{4M_A^2}{(M_A + M_B)^2} \right) \right] = 3.44 \text{ m}$$

**Calcolo della nuova massa  $M_B$  necessaria per aumentare la velocità  $V_B$  dopo l'impatto.**

Come dimostrato precedentemente la velocità  $V_B$  dopo l'urto è descritta da  $V_B = \left( \frac{2M_A}{M_A + M_B} \right) v_A$

Un differente valore della massa  $M_B^*$  causa quindi un differente valore di  $V_B^*$ . Per aumentare tale valore del 10% è necessario soddisfare l'equazione

$$\frac{V_B^*}{V_B} = \frac{\left( \frac{2M_A}{M_A + M_B^*} \right) v_A}{\left( \frac{2M_A}{M_A + M_B} \right) v_A} = \frac{M_A + M_B}{M_A + M_B^*} = 1.1 \quad \text{da cui il nuovo valore } M_B^* = \frac{M_B - 0.1 \cdot M_A}{1.1} = 2.54 \text{ kg}$$

che raggiungerebbe la nuova massima quota  $h^* = 4.02 \text{ m}$

**2. Testo.** Un cilindro di raggio  $r$  e di massa  $M_B = 4 \text{ kg}$  è posto alla base di un piano inclinato di angolo  $\theta = 30^\circ$  rispetto all'orizzontale. Il cilindro inizialmente fermo comincia a rotolare senza strisciare molto lentamente salendo a causa di un contrappeso di massa  $M_A = 3 \text{ kg}$  che è collegato all'asse del cilindro tramite fune e puleggia di masse trascurabili. Determinare la velocità con cui il contrappeso urta sul terreno cadendo dalla altezza iniziale  $h = 25 \text{ cm}$  ed il tempo necessario per l'impatto. Determinare anche l'aumento percentuale di velocità che si verificherebbe sostituendo al cilindro un blocco di pari massa che scivola senza attrito sul piano inclinato [Si assuma  $I_{\text{cil}} = M_B r^2/2$ ].

## 2. Soluzioni.

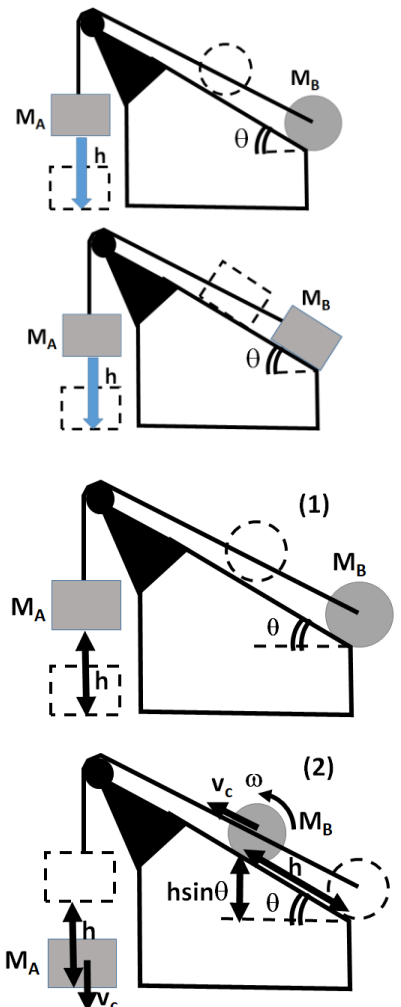
### Calcolo della velocità di impatto.

Poiché durante il moto di rotolamento del cilindro l'attrito statico non compie lavoro così come avviene anche per le altre forze non conservative, è quindi possibile applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica fra l'istante iniziale di partenza (1) e quello finale di impatto al suolo (2). In sintesi:

Energia iniziale (solo potenziale):

$$E_1 = U_{A1} + U_{B1} = M_A g h$$

(dove il riferimento per  $M_B$  è scelto per semplicità alla base del piano inclinato, mentre quello per  $M_A$  è scelto al livello suolo)



Energia finale:

(solo potenziale):  $U_2 = U_{A2} + U_{B2} = M_B gh \sin \theta$

(solo cinetica):  $K_2 = K_{A2} + K_{B,tra} + K_{B,rot} = \frac{1}{2} M_A v_c^2 + \frac{1}{2} M_B v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left[ M_A + M_B \left( 1 + \frac{I}{M_B r^2} \right) \right] v_c^2$

ove è stata usata la condizione di rotolamento  $v_c = \omega r$

(energia meccanica):  $E_2 = U_2 + K_2 = M_B gh \sin \theta = \frac{1}{2} \left[ M_A + M_B \left( 1 + \frac{I}{M_B r^2} \right) \right] v_c^2$

Imponendo la conservazione dell'energia:  $M_A gh = M_B gh \sin \theta + \frac{1}{2} \left[ M_A + M_B \left( 1 + \frac{I}{M_B r^2} \right) \right] v_c^2$

si ricava la **velocità di impatto**:  $v_c = \sqrt{2gh \frac{M_A - M_B \sin \theta}{M_A + M_B (1 + 1/2)}} = \mathbf{0.738 \text{ m/s}}$

Sapendo che il moto di discesa è uniformemente accelerato, combinando l'espressione della velocità di impatto  $v_c = at$ , con quella dello spazio percorso  $h = at^2/2$ , ed eliminando l'accelerazione  $a$

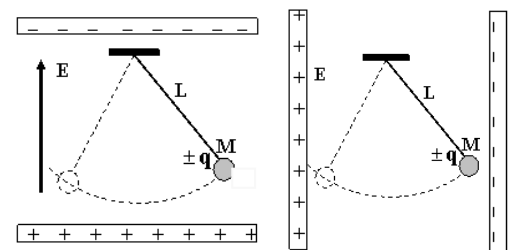
si ottiene il **tempo di percorrenza**  $t = \frac{2h}{v_c} = \mathbf{0.68 \text{ s}}$

Nel secondo caso, sostituendo al cilindro un blocco di pari massa che scivola senza attrito sul piano inclinato la velocità di impatto avrebbe la medesima formula, con la sola assenza del momento di inerzia ( $I=0$ ) per cui la **velocità di impatto** diviene :

$v_{c2} = \sqrt{2gh \frac{M_A - M_B \sin \theta}{M_A + M_B}} = \mathbf{0.837 \text{ m/s}}$

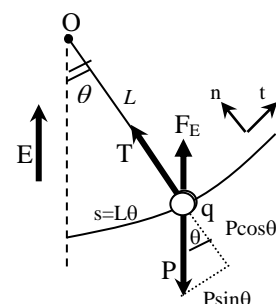
Il rapporto fra le velocità nei due casi è  $\frac{v_{c2}}{v_c} = \sqrt{\frac{M_A + 3M_B/2}{M_A + M_B}} = \mathbf{1.13}$  con un incremento del **13%**.

**3. Testo.** Un campo elettrico uniforme  $E$  viene generato tra i due piatti paralleli di un condensatore con la polarità illustrata in figura. Una piccola sfera conduttrice di massa  $M$  e di carica  $+q$  viene sospesa ad un cardine con un filo di lunghezza  $L$ , tutto nello spazio interno al condensatore. Sapendo che il periodo di oscillazione di questo pendolo diminuisce del 10% quando il campo elettrico viene ruotato di  $90^\circ$  determinare il valore del campo elettrico  $E$  ( $M=5 \text{ g}$ ;  $L= 50 \text{ cm}$ ;  $q=+10^{-5} \text{ C}$ )



**3. Soluzione.** Nel primo caso il pendolo oscilla grazie alla distribuzione delle 3 forze applicate: la forza peso  $\mathbf{P=Mg}$ , la tensione della fune  $\mathbf{T}$ , la forza elettrica  $\mathbf{F_E=qE}$  (il campo elettrico è diretto verso l'alto). Scomponendo le forze sugli assi  $n,t$  si ottiene:

$$\begin{cases} n) & T - P \cos \theta + F_E \cos \theta = Mv^2/L \\ t) & -P \sin \theta + F_E \sin \theta = ML \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{cases}$$

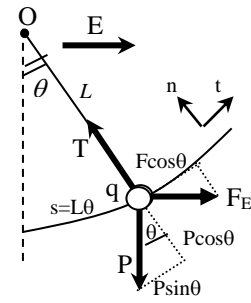


Utilizzando la seconda espressione approssimata per piccole oscillazioni

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left( \frac{Mg - qE}{ML} \right) \theta = 0 \quad \text{da cui il periodo } T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g - qE/M}}$$

Nel caso in cui il campo elettrico viene ruotato di  $90^\circ$  la scomposizione delle forze diviene

$$\begin{cases} n) & T - P \cos \theta - F_E \sin \theta = Mv^2/L \\ t) & -P \sin \theta + F_E \cos \theta = ML \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$



La carica è sottoposta ad un sistema di forze che si equilibra quando il pendolo si inclina di  $\theta_{eq}$

tale che  $\tan \theta_{eq} = \frac{F_E}{P} = \frac{qE}{Mg}$  come se nel pendolo fosse soggetto ad una accelerazione efficace

$g' = \sqrt{g^2 + (qE/M)^2}$ . Stante questa nuova accelerazione per piccole oscillazioni intorno alla nuova posizione di equilibrio il periodo del pendolo diviene in questo caso

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g'}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + (qE/M)^2}}}$$

Rapportando i due periodi di oscillazione ed imponendo  $T_2/T_1 = 90\% = 0.9$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + (qE/M)^2}}}}{2\pi \sqrt{\frac{L}{g - (qE/M)}}} = \sqrt[4]{\frac{[g - (qE/M)]^2}{g^2 + (qE/M)^2}} = 0.9$$

ed elevando alla quarta potenza si ottiene:

$$\left( \frac{T_2}{T_1} \right)^4 = \frac{[g - (qE/M)]^2}{g^2 + (qE/M)^2} = 1 - \frac{2g \cdot (qE/M)}{g^2 + (qE/M)^2} = 0.9^4 = 0.656$$

che porta all'equazione di secondo grado

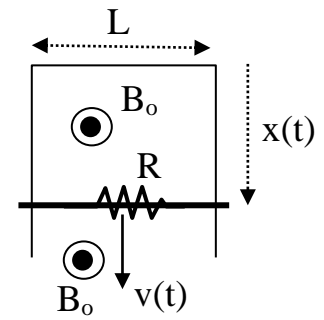
$$(qE/M)^2 - 5.814 \cdot g \cdot (qE/M) + g^2 = 0$$

che ha una sola soluzione accettabile  $(qE/M) = 0.177g$

(l'altro valore 5.6 g è da escludersi perché porterebbe il pendolo a rovesciarsi)

da cui si ricava il campo elettrico  $E = 0.177 \frac{Mg}{q} = \mathbf{867 \text{ V/m}}$

**4. Testo.** Una barretta metallica di lunghezza  $L$ , di resistenza elettrica  $R$  e di massa  $m$  può scorrere mediante contatti striscianti su due guide metalliche verticali connesse elettricamente fra di loro senza apprezzabile resistenza, definendo così una maglia rettangolare dove può scorrere corrente. La barretta è lasciata cadere per gravità lungo l'asse verticale  $x$ . Il sistema è soggetto ad un vettore  $B_o$  uniforme orizzontale come riportato in figura. Calcolare l'espressione sia della forza magnetica frenante agente sulla barretta, sia della velocità di caduta  $v(t)$ . Nelle ipotesi di barretta cilindrica (di sezione  $S$  e lunghezza  $L$ ) esprimere i risultati in funzione della sola resistività elettrica  $\rho$  e della densità  $\delta$  della barretta.



**4. Soluzione.** La barretta chiude il circuito ACDE.

Il vettore induzione magnetica si concatena con tale circuito dando origine ad un flusso concatenato variabile nel tempo  $\Phi(B_o) = B_o L x(t)$  dove  $x(t)$  è la posizione mobile della barretta.

Il movimento della barretta  $DE$  causa quindi una variazione di flusso di  $B_o$  nel circuito  $ACDE$  generando una forza elettromotrice indotta

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_o L \frac{dx}{dt} = -B_o L v_x \quad (\text{legge di Faraday-Neumann-Lenz})$$

dove il segno negativo indica che la corrente circola ma in senso orario, ossia nel verso opposto a quello considerato positivo rispetto a  $B_o$  (regola mano destra).

L'intensità di questa corrente indotta (facendo a meno del segno di cui abbiamo appena parlato e che è viene indicato nel disegno) risulta quindi  $i_i = \frac{|f_i|}{R} = \frac{B_o L v_x}{R}$

Una volta che nel circuito viene indotta la corrente  $i_i$ , i quattro lati del circuito subiranno delle forze attrattive di natura magnetica, in accordo alla seconda formula di Laplace  $\vec{F} = i_i \int d\vec{l} \times \vec{B}_o$

In particolare sull'unico lato mobile  $DE$  viene generata una forza frenante  $F_L = i_i L B_o = B_o^2 L^2 v_x / R$  contraria al moto (asse  $x$ ) e proporzionale alla velocità di caduta. Applicando il II principio della dinamica lungo l'asse del moto si osserva la competizione fra la forza peso che tende ad accelerare verso il basso la barretta e la forza frenante di natura magnetica. Tali forze non si equilibrano e producendo una variazione di velocità

$$mg - F_L = ma_x = m \frac{dv_x}{dt}$$

Il caso è del tutto analoga al moto di caduta di un paracadutista soggetto alla forza peso ed una resistenza passiva proporzionale alla prima potenza della velocità. Risolvendo l'equazione differenziale risultante ed imponendo la velocità della barretta inizialmente nulla si ottiene

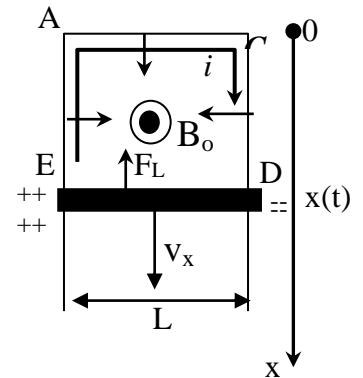
$$v(t) = v_{lim} [1 - \exp(-t/\tau)] \quad \text{dove } \tau = \frac{mR}{B_o^2 L^2}, \quad \text{mentre } v_{lim} = \frac{mgR}{B_o^2 L^2} = g \cdot \tau$$

Se infine assumiamo che la barretta sia cilindrica di sezione  $S$  e lunghezza  $L$  la sua massa è esprimibile in funzione della densità  $\delta$  come  $m = \delta(S \cdot L)$ ,

mentre la sua resistenza elettrica è esprimibile in funzione della resistività come  $R = \rho(L/S)$

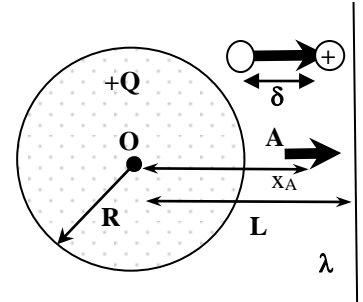
si ottiene l'espressione finale per:

$$\text{tempo caratteristico: } \tau = \frac{\delta \cdot \rho}{B_o^2} \quad \text{e} \quad \text{velocità limite: } v_{lim} = g \cdot \tau = \frac{g \cdot \delta \cdot \rho}{B_o^2}$$



## Integrazione di due esercizi solo ai fini del Secondo esonero

**2. Testo.** Una carica è distribuita uniformemente con densità  $\rho=100\mu\text{C}/\text{m}^3$  all'interno di una sfera di raggio  $R=10\text{cm}$ . Una seconda carica è disposta lungo un filo rettilineo infinitamente lungo con densità  $\lambda$  a distanza  $L=50\text{cm}$  dal centro della sfera. Nel punto A è disposto un sistema rigido formato da due cariche opposte  $+q,-q$  poste a distanza fissa fra loro  $\delta$ . Il centro del dipolo è distante  $x_A=20\text{cm}$  dall'asse in O. Determinare per quale valore di  $\lambda$  il dipolo è in equilibrio.



### 2. Soluzione. Calcolo del campo elettrico nel punto A

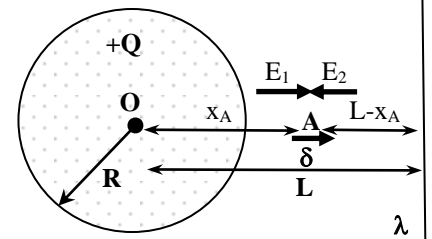
Il campo elettrico  $E_1$  prodotto dalla sfera uniformemente carica nel punto esterno A si calcola applicando la legge di Gauss ad una superficie concentrica di raggio  $x_A$ , considerando che il flusso

uscite è generato da tutta la carica presente nella sfera  $Q = \rho \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)$

$$\Phi_{\Sigma}(E_1) = \iint_{\Sigma} \vec{E}_1 \cdot \hat{n} dS = E_1 (4\pi x_A^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) \quad \text{da cui} \quad E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{x_A^2}$$

Il campo elettrico  $E_2$  generato dal filo indefinito uniformemente carico nel punto A è diretto in senso opposto e vale  $E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(L-x_A)}$ .

Il campo complessivo è quindi  $E_{tot} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{x_A^2} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(L-x_A)}$



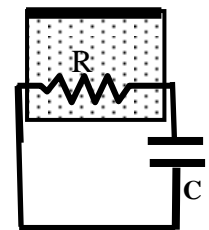
La forza agente sul dipolo di momento  $p$  disposto nel punto A vale

$$\vec{F} = -\nabla U_{dipolo} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}_{tot}) = 0 \quad \text{da cui} \quad F_x = p \left[ -2 \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{x_A^3} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(L-x_A)^2} \right] = 0$$

da cui si ricava la densità lineare di carica  $\lambda = -\frac{4\pi}{3} \frac{R^3(L-x_A)^2}{x_A^3} \rho = -4.71 \mu\text{C}/\text{m}$

(si tratta di una densità di carica negativa. Il segno effettivo del campo elettrico  $E_2$  è quindi opposto a quello riportato in figura)

**3. Testo.** Il dispositivo in figura si compone di un circuito RC nel quale un condensatore inizialmente carico con energia  $E_0=20 \text{ kJ}$  (al tempo  $t=0$ ) si scarica lentamente. Il calore prodotto nella resistenza R durante il processo di scarica viene interamente sfruttato per scaldare  $0.05 \text{ kmol}$  di un gas monoatomico contenuto in un cilindro di volume costante. Determinare dopo  $t=10\text{s}$ , l'energia residua presente nel condensatore, il calore prodotto nella resistenza e l'aumento della temperatura del gas. Calcolare le stesse quantità dopo un tempo sufficientemente lungo quando il processo di scarica è sostanzialmente completato. Dati:  $R=2\text{k}\Omega$ ,  $C=5\text{mF}$ ,  $c_v=3R_{\text{gas}}/2$  dove  $R_{\text{gas}}=8314 \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$



**3. Soluzione.** Nel processo di scarica l'energia immagazzinata nel condensatore è data da:

$$E_c(t) = E_c(0)\exp(-2t/\tau) \quad \text{ove } \tau = RC = 10\text{s}$$

con valore  $E_{cA} = 2.71 \text{ kJ}$  dopo 10 s,

mentre il valore asintotico è evidentemente  $E_{cB} = 0$ .

**L'energia dissipata** per effetto Joule nella resistenza si ottiene per differenza:

$$E_J(t) = E_c(0) - E_c(t) \quad \text{da cui } E_J(t) = E_c(0)[1 - \exp(-2t/\tau)]$$

con valore  $E_{JA} = 17.3 \text{ kJ}$  dopo 10 s, mentre il valore asintotico è  $E_{JB} = 20 \text{ kJ}$ .

**L'aumento di temperatura** è dato dalla espressione  $\Delta T = \frac{E_J(t)}{nc_V}$

con valori  $\Delta T_A = 27.7 \text{ }^\circ\text{C}$  dopo 10 s,

mentre asintoticamente  $\Delta T_B = 32.1 \text{ }^\circ\text{C}$