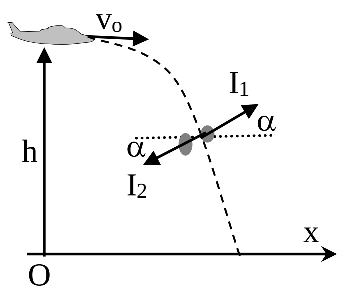
FISICA

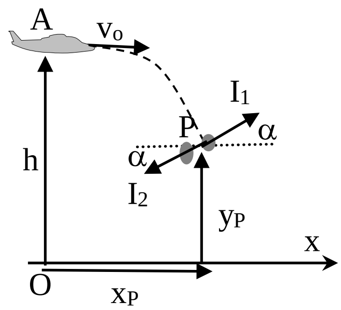
A.A. 2021-2022
Ingegneria Gestionale
1° appello del 27 Giugno 2022
Esame completo - Soluzioni

1. Testo. Un caccia bombardiere viaggia alla quota di sicurezza h=1000 m rispetto al suolo con una velocità orizzontale uniforme v_o=150 m/s. Dopo aver avvistato un bersaglio il pilota lascia cadere una bomba senza imprimere alcuna velocità nel sistema solidale all'aereo. Dopo un tempo t_o=5 s (a partire dal lancio) la bomba esplode in due frammenti di massa m_1=2 kg e m_2=8 kg. L'esplosione viene ben schematizzata dalla presenza di due impulsi interni opposti, di pari intensità $I_1=I_2$=200 kgm/s con inclinazione α=30° rispetto all'orizzontale agenti rispettivamente sui frammenti di massa m_1 e m_2 come indicato in figura. Determinare i punti di impatto dei due frammenti al suolo ed i rispettivi tempi di volo complessivi.



1. Soluzione. Studio della traiettoria parabolica della bomba in caduta libera
Inizialmente la bomba viene lasciata cadere dal punto A≡(0, h) con velocità orizzontale v_o.
Il moto parabolico viene facilmente scomposto lungo gli assi x,y come segue

lungo l'asse x $\begin{cases} x(t) = v_o t \\ v_x = v_o \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = h - gt^2/2 \\ v_y(t) = -gt \\ a_y = -g \end{cases}$



Al tempo t_o=5s immediatamente prima dello scoppio la bomba si trova nel punto P≡(x_P, y_P)

di coordinate $\begin{cases} x_P = v_o t_o = 750m \\ y_P = h - gt_o^2/2 = 877.5m \end{cases}$

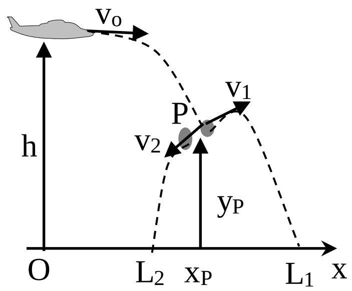
con le componenti della velocità $\begin{cases} v_{P,x} = v_o = 150\,m/s \\ v_{P,y} = -gt_o = -49\,m/s \end{cases}$

Per calcolare le velocità dei frammenti immediatamente dopo lo scoppio si può applicare il teorema dell'impulso e della variazione della quantità di moto per cui $\vec{I} = \Delta\vec{p} = m(\vec{v}_{dopo} - \vec{v}_{prima})$ da cui $\vec{v}_{dopo} = \vec{v}_{prima} + \vec{I}/m$

Applicandolo tale teorema separatamente alle due masse m_1 e m_2 e scomponendo la velocità secondo gli assi x,y si ottiene:

per la massa m_1 $\begin{cases} v_{1,x} = v_{P,x} + I_1 \cos\alpha/m_1 = 237\,m/s \\ v_{1,y} = v_{P,y} + I_1 \sin\alpha/m_1 = 1\,m/s \end{cases}$

per la massa m_2 $\begin{cases} v_{2,x} = v_{P,x} - I_2 \cos\alpha/m_2 = 128\,m/s \\ v_{2,y} = v_{P,y} - I_2 \sin\alpha/m_2 = -61.5\,m/s \end{cases}$



Successivamente ciascuna scheggia dotata di una nuova velocità iniziale v^+ percorrerà una nuova traiettoria parabolica secondo il sistema di equazioni:

lungo l'asse x $\begin{cases} x(t) = x_P + v_x^+ t \\ v_x = v_x^+ \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = y_P + v_y^+ t - gt^2/2 \\ v_y(t) = v_y^+ - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Imponendo y(t)=0 si ottiene il **tempo di volo** $t = \dfrac{v_y^+ + \sqrt{(v_y^+)^2 + 2gy_P}}{g}$ che per le due masse è

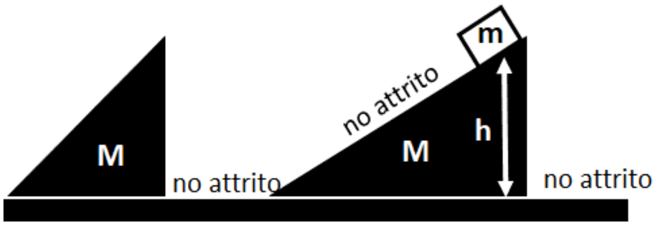
$t_1 = \dfrac{v_{1,y} + \sqrt{v_{1,y}^2 + 2gy_P}}{g} =$ **13.48 s** (per il frammento m_1, dopo t_o)

$t_2 = \dfrac{v_{2,y} + \sqrt{v_{2,y}^2 + 2gy_P}}{g} =$ **8.5 s** (per il frammento m_2, dopo t_o)

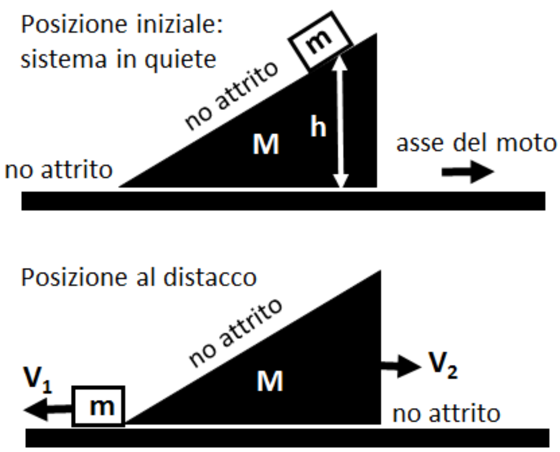
Infine è facile calcolare la gittata $L = x_P + v_x^+ \cdot t$ che vale rispettivamente

L_1=3940 m (per il frammento m_1)
L_2=1842 m (per il frammento m_2)

2. Testo. Un cuneo di massa **M=20 kg** è inizialmente fermo sopra un piano orizzontale, ma libero di muoversi senza attrito su di esso. Un blocco di massa **m=5 kg** è anch'esso tenuto inizialmente fermo sulla sommità del cuneo ad una quota **h=3m** rispetto al piano orizzontale. Il blocco **m** scivola senza attrito sul cuneo fino a raggiungere il piano orizzontale che percorre per un breve tratto prima di urtare elasticamente un secondo cuneo, fermo, di massa **M=20 kg**. Il blocco m, rilanciato indietro dall'urto, rincorre il primo cuneo e vi risale sino ad una nuova quota **h***. **Determinare** la nuova altezza **h*** e la velocità assoluta del blocco m e del cuneo M in quell'istante.



2. Soluzione. Durante la discesa del blocco *m* lungo il pendio liscio del cuneo le uniche forze esterne agenti sul sistema massa-cuneo sono le forze peso e la reazione normale del piano. Essendo esse tutte dirette lungo la verticale, **si conserva** la **componente orizzontale della quantità di moto del sistema** tra i due momenti riportati in figura: $p_{C,x}^{prima} = p_{C,x}^{dopo}$



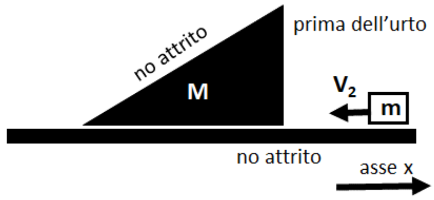
da cui $0 = MV_2 + mV_1$, e $V_1 = -\dfrac{MV_2}{m}$

In assenza di attriti si conserva anche l'energia meccanica fra i due momenti riportati in figura: $E_m^{prima} = E_m^{dopo}$

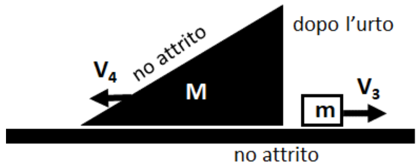
$$mgh = \frac{1}{2}MV_2^2 + \frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{1}{2}MV_2^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{m}V_2^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{M(m+M)}{m}\right]V_2^2$$

da cui le **velocità del cuneo** $V_2 = \sqrt{2gh}\sqrt{\dfrac{m^2}{M(M+m)}}$ **= 1.71 m/s,**

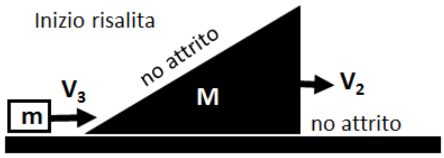
e **del blocco** $V_1 = -\sqrt{2gh}\sqrt{\dfrac{M}{M+m}}$ **= -6.86 m/s** (in direzione contraria asse delle x)



Successivamente avviene l'urto elastico del blocco con il secondo cuneo fermo. Applicando le leggi di conservazione dell'energia e della conservazione della quantità di moto del sistema prima e dopo l'urto si giunge alla formula della velocità del blocco V_3 successiva all'urto elastico

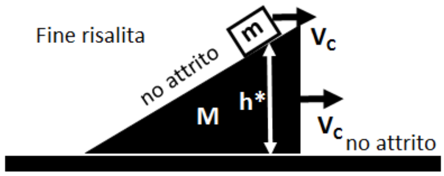


$$V_3 = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)V_1 = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{M(M-m)^2}{(M+m)^3}}$$ =**+4.11 m/s** (lungo asse x)



Essendo **V_3>V_2** il blocco può quindi raggiungere il cuneo iniziando la fase di risalita in cui, analogamente alla fase di discesa, **si conserva la componente orizzontale della quantità di moto del sistema**

$mV_3 + MV_2 = (M+m)\cdot V_C$ da cui la velocità acquistata dal c.d.m.



$$V_C = \frac{mV_3 + MV_2}{M+m} = \sqrt{2gh}\,\frac{\sqrt{\dfrac{m^2M(M-m)^2}{(M+m)^3}} + \sqrt{\dfrac{m^2M}{(M+m)}}}{M+m} =$$

$$V_C = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{m^2M}{(M+m)}}\,\frac{\dfrac{M-m}{M+m}+1}{M+m} = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{M}{(M+m)}}\,\frac{2mM}{(M+m)^2} = \mathbf{2.195\ m/s}$$

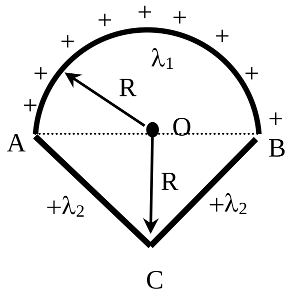
Ed in assenza di attriti **si conserva l'energia meccanica del sistema.** Imponendo la sua conservazione prima e dopo la salita

$$mgh^* + \frac{1}{2}(M+m)V_C^2 = \frac{1}{2}mV_3^2 + \frac{1}{2}MV_2^2$$

dalla quale avendo già calcolato **V_2, V_3, V_c** si può facilmente ricavare **h***.

$$h^* = \frac{1}{2g}\,\frac{mV_3^2 + MV_2^2 - (M+m)V_C^2}{m} = \frac{1}{2g}\,\frac{mV_3^2 + MV_2^2 - \dfrac{(mV_3+MV_2)^2}{M+m}}{m} = \frac{1}{2g}\,\frac{M}{M+m}(V_3 - V_2)^2 = \mathbf{0.23\ m}$$

3. Testo. La distribuzione di carica illustrata in figura viene distribuita come segue: sulla semicirconferenza di raggio R=5cm, di centro O al di sopra del diametro AB viene collocata una carica con densità lineare uniforme λ_1=50μC/m; nella parte inferiore c'è invece una distribuzione di carica lineare uniforme con densità λ_2 disposta sui due segmenti ortogonali AC e BC. Sapendo che il campo elettrico in O si annulla determinare il valore della densità λ_2

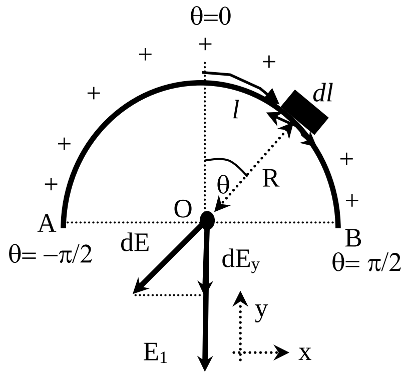


3. Soluzione. Campo elettrico generato dalla semicirconferenza

La carica infinitesima *dq* disposta sull'elemento di lunghezza infinitesima *dl*, genera nel punto *O* (alla distanza *R*) un contributo di campo elettrico $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_o R}$ diretto come in figura dove la carica *dq* sull'arco si scrive come $dq=\lambda_1 dl= \lambda_1 R\, d\theta$.

Assumendo per ragioni di simmetria il vettore risultante E_1 tutto diretto lungo l'asse delle *y (in senso contrario)* si conviene di proiettare il contributo efficace di campo elettrico lungo l'asse *y*

$dE_y = -dE\cos\theta$ (*il segno indica che è in senso opposto all'asse y*)



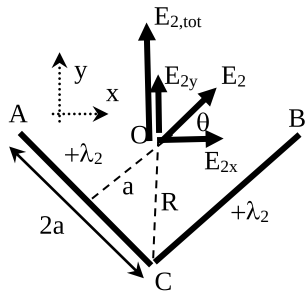
per poi integrarlo su tutta la distribuzione per ottenere E_{tot1}

$$E_1 = \int dE_y = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda_1 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R} d\theta = \frac{-\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o R}\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{-\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o R} \quad \text{(Eq.1)}$$

Campo elettrico generato da una carica uniformemente distribuita lungo un segmento rettilineo. Calcolo lungo la mediana

Il campo elettrico generato dal segmento rettilineo AC di lunghezza 2a è facilmente calcolabile nei punti sulla mediana ℓ. Per ragioni di simmetria è diretto proprio nella direzione ℓ ortogonale al segmento ed ha modulo

$$E_2(\ell) = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o \ell}\frac{a}{\sqrt{a^2+\ell^2}}$$



Nel punto O alla distanza ℓ=a dal segmento il campo elettrico vale

$$E_2(O) = \frac{\lambda_2}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_o a} \quad \text{dove essendo } a = \frac{\sqrt{2}}{2}R \text{ si ottiene } E_2(O) = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R}$$

con eguali componenti lungo gli assi x,y.

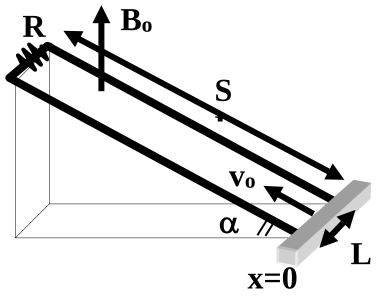
$$E_{2x}(O) = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}\lambda_2}{4\pi\varepsilon_o R} \text{ (lungo x)}, \quad E_{2y}(O) = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R}\sin\theta = \frac{\sqrt{2}\lambda_2}{4\pi\varepsilon_o R} \text{ (lungo y)},$$

Tuttavia la presenza di una analoga distribuzione sul segmento rettilineo BC crea una simmetria rispetto all'asse y che annulla i contributi lungo l'asse x e raddoppia i contributi lungo y. Per questo motivo il campo elettrico complessivo dei due segmenti è diretto lungo l'asse y e viene raddoppiato.

$$E_{2,tot} = 2E_{2y}(O) = \frac{\sqrt{2}\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R} \quad \text{(Eq.2)}$$

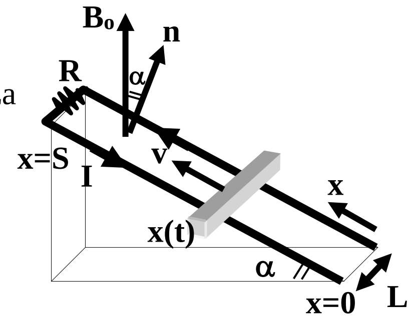
Il bilanciamento perfetto nel punto O tra il contributo in Eq.(1) con quello in Eq.(2) si ottiene quando $E_{2,tot} = E_1$, quindi $\frac{\sqrt{2}\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R} = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o R}$ da cui $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} =$ **35.3 μC/m**

4. Testo. Una barretta metallica parallelepipeda di lunghezza L=15 cm e di massa m=100 g è libera di scorrere lungo una guida metallica giacente su un piano inclinato di un angolo α=25° rispetto all'orizzontale in modo da formare un circuito elettrico planare di forma rettangolare di lati L ed S. Tale circuito, di resistenza costante R=10 Ω, giace in una regione dove è applicato un vettore induzione magnetica uniforme diretto in verticale di intensità B_o=0.5 T. La barretta è alla base del piano inclinato e viene lanciata lungo il piano con velocità v_o=0.2 m/s come indicato in figura. Il moto della barretta viene contrastato sia dalla forza di gravità che della forza elettromagnetica. Determinare dopo quanto tempo la barretta si ferma per poi invertire il suo moto. Determinare per confronto il tempo di arresto anche nel caso in cui il vettore induzione magnetica sia invece nullo.



4. Soluzione. La spira rettangolare è disposta sul piano inclinato e la sua normale, scelto il verso di percorrenza antiorario forma un angolo α con il vettore induzione magnetica verticale. Il calcolo del flusso concatenato deve tener conto di tale inclinazione

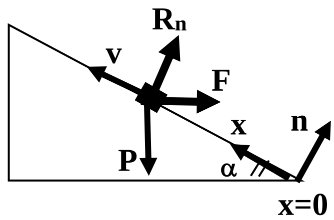
$$\Phi_c = \int \vec{B}\cdot\hat{n}dS = \int B\cos\alpha dS = B\cdot L\cdot\cos\alpha\cdot[S - x(t)]$$



Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot\vec{n}dS = -B\cdot L\cdot\cos\alpha\cdot\frac{d}{dt}[S - x(t)] = +B\cdot L\cdot v\cdot\cos\alpha$$

la corrente indotta nel circuito $i = \frac{B\cdot L\cdot v}{R}\cos\alpha$ (nella direzione in figura)



la forza elettromagnetica resistente $F = \left|i\vec{L}\times\vec{B}\right| = \frac{(B\cdot L)^2\cdot v}{R}\cos\alpha$

(nella direzione orizzontale come indicato in figura)

Scomponendo le forze lungo gli assi x,n si ottiene:

$$\begin{matrix} x) \\ n) \end{matrix}\begin{cases} -P\sin\alpha. - F\cos\alpha = ma = m\frac{dv}{dt} \\ R_n - F\sin\alpha - P\cos\alpha = 0 \end{cases}$$ da cui l'eq. differenziale $\frac{dv}{dt} + \frac{B^2L^2\cos^2\alpha}{mR}v = -g\sin\alpha$

o alternativamente $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = -g\sin\alpha$ ove il tempo caratteristico è $\tau = \frac{mR}{B^2L^2\cos^2\alpha} =$ **216 s**

La soluzione per l'evoluzione della velocità nel tempo è data dalla somma di un integrale particolare e di quello generale secondo

$$v = -g\tau \sin\alpha + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -g\tau\sin\alpha + \left(v_o + g\tau\sin\alpha\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

dove A è ottenuta dalla condizione iniziale della velocità v(t=0)=v_o

L'istante di inversione del moto si ottiene dall'annullamento temporaneo della velocità che si ottiene con i seguenti passaggi algebrici

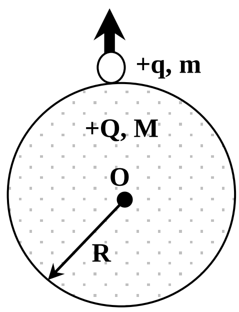
$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{g\tau\sin\alpha}{v_o + g\tau\sin\alpha} \quad \text{da cui} \quad \exp\left(+\frac{t}{\tau}\right) = \frac{g\tau\sin\alpha + v_o}{g\tau\sin\alpha} = 1 + \frac{v_o}{g\tau\sin\alpha}$$

ed infine applicando l'operatore logaritmo ad ambo i membri $t_1 = \tau\ln\left(1+\frac{v_o}{g\tau\sin\alpha}\right)$ = **48.284 ms**

In assenza di forza elettromagnetica il tempo in cui si avviene l'inversione del moto sarebbe stato $t_2 = \frac{v_o}{g\sin\alpha}$ **= 48.290 ms** che è numericamente indistinguibile dal primo caso, ad indicazione che la forza elettromagnetica indotta è in questo esercizio molto inferiore alla forza di gravità. Le differenza tra i due tempi nei due casi è infatti $t_2 - t_1 =$ **5.4 μs**

Integrazione di due esercizi solo ai fini del Secondo esonero

1. Testo. Il pianeta Elektros di massa M=10^{22} kg di raggio R=1000 km è dotato di una debole carica positiva Q=10^4 C distribuita uniformemente sulla superficie del pianeta. Un piccolo razzo di massa m=1000 kg, anch'esso carico positivamente con carica q=5 C è inizialmente posizionato sulla superficie del pianeta. Determinare il valore della forza di attrazione esercitata inizialmente sul razzo e dell'impulso che è necessario fornire al razzo nella direzione radiale esterna per fargli raggiungere la quota di 2000 km dalla superficie del pianeta. Determinare infine l'impulso necessario per uscire dal campo di attrazione del pianeta. Tenere in conto sia della forza di gravità che della forza elettrica. Dati: G=6.67*10^{-11} Nm^2kg^{-2}, k_o=9*10^9 Nm^2C^{-2}



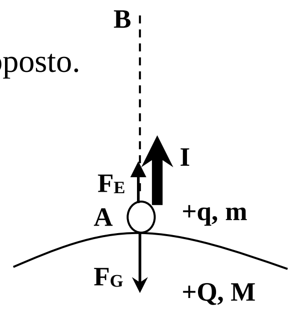
1. Soluzione.

Il razzo è soggetto a due forze entrambe dirette lungo il raggio ma in senso opposto.

La forza di attrazione gravitazionale diretta verso l'interno: $F_G = G\frac{M\cdot m}{r^2}$

La forza di repulsione coulombiana diretta verso l'esterno: $F_E = k_o\frac{Q\cdot q}{r^2}$

La **forza complessiva nel punto A** sulla superficie del pianeta è attrattiva e vale $F_A^{tot} = \frac{G\cdot M\cdot m - k_o\cdot Q\cdot q}{R^2} =$ **217 N**



Per il calcolo dell'impulso minimo applicato alla partenza del razzo in A per raggiungere il punto B, è utile introdurre per ciascuna forza una funzione energia potenziale come segue:

Energia potenziale per la forza di attrazione gravitazionale: $U^G = -G\dfrac{M \cdot m}{r}$ (aumenta con l'altezza)

Energia potenziale per la forza di repulsione coulombiana: $U^E = k_o \dfrac{Q \cdot q}{r}$ (diminuisce con l'altezza)

Inoltre nel punto A viene applicato un impulso I tale da imprimere una velocità iniziale al razzo $v_A = I/m$ corrispondente all'energia cinetica $K_A = \dfrac{1}{2} m v_A^2 = \dfrac{I^2}{2m}$

Applicando la conservazione dell'energia tra i punti A e B si ottiene:

$K_A + U_S^G + U_A^E = U_B^G + U_B^E$ ossia $\dfrac{I^2}{2m} + \dfrac{k_o \cdot Q \cdot q - G \cdot M \cdot m}{R_A} = \dfrac{k_o \cdot Q \cdot q - G \cdot M \cdot m}{R_B}$

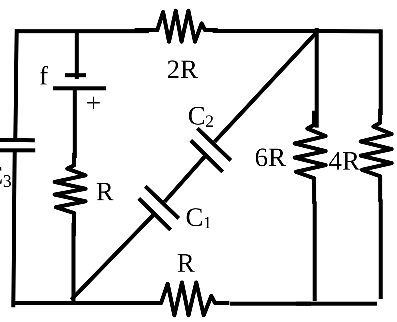
da cui $\dfrac{I^2}{2m} = (G \cdot M \cdot m - k_o \cdot Q \cdot q)\dfrac{R_B - R_A}{R_A \cdot R_B}$ che permette di trovare l'**impulso per giungere in B**

$I = \sqrt{2m(G \cdot M \cdot m - k_o \cdot Q \cdot q)\dfrac{R_B - R_A}{R_A \cdot R_B}} = \sqrt{\dfrac{4m}{3R}(G \cdot M \cdot m - k_o \cdot Q \cdot q)}$ **= $5.38 \cdot 10^5$ kg m s^{-1}**

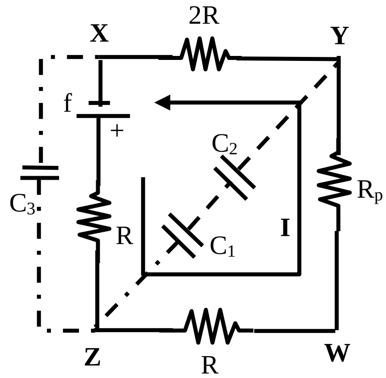
dove: $R_A = R$, $R_B = 3R$, $K_B = 0$, poiché arriva in B avendo perso tutta l'energia cinetica.

Invece per determinare l'impulso necessario per allontanarsi indefinitamente, basta imporre $R_B = \infty$ per cui **l'impulso minimo per la fuga** diviene $I = \sqrt{\dfrac{2m}{R}(G \cdot M \cdot m - k_o \cdot Q \cdot q)}$ **= $6.59 \cdot 10^5$ kg m s^{-1}**

3. Testo. Il circuito elettrico si trova da lungo tempo nella configurazione riportata in figura. Determinate la carica presente sulle armature di ciascun condensatore. [Dati: f=8V, R=5kΩ, C_1,=4nF, C_2,=1nF, C_3,=10nF].



3. Soluzione. In condizioni stazionarie la corrente non scorre nei tre condensatori che in figura vengono pertanto tratteggiati. La corrente scorre solo nell'unica maglia secondo il percorso ZWYXZ (i due resistori in parallelo collegati nel ramo YW sono stati sostituiti da $R_p = 4R // 6R = 2.4R = 12 k\Omega$).



La **corrente di maglia** è $I = \dfrac{\sum f}{\sum R} = \dfrac{f}{R + R + 2.4R + 2R} =$ **0.25 mA**

Le **cariche ai capi dei condensatori**

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 = (V_Z - V_Y)\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = [I(R + R_p)]\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \mathbf{3.4\,nC} \\ Q_3 = (V_Z - V_X)C_3 = (f - IR)C_3 = \mathbf{67.5 nC} \end{cases}$$