



# FISICA

A.A. 2012-2013

Ingegneria Gestionale

Soluzioni del 1° appello del 12 Giugno 2013

1. I moti delle schegge di massa  $M_1$  e  $M_2$  sono entrambi parabolici a causa dell'accelerazione di gravità. Proiettando lungo  $x, y$  si ottiene il sistema di equazioni della cinematica

$$\begin{cases} a_y = -g \\ a_x = 0 \end{cases} \quad \text{da cui le velocità} \quad \begin{cases} v_y = -gt \\ v_x = V_{1/2} \end{cases} \quad \text{ed i moti componenti} \quad \begin{cases} y = H - gt^2/2 \\ x = V_{1/2} \cdot t \end{cases}$$

dove con  $V_{1/2}$  si indica la velocità orizzontale subito dopo l'esplosione della generica scheggia  
Le schegge toccano suolo nello stesso istante  $t$ : la quota  $H$  si ottiene imponendo  $y(t)=0$

**Quota H:**  $y(t)=0$  da cui  $H = \frac{gt^2}{2} = 490 \text{ m}$

**Velocità della scheggia n.1:**  $V_1 = x_1/t = 14 \text{ m/s}$

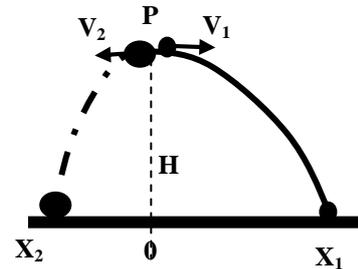
**Velocità della scheggia n.2:** durante l'esplosione in P si conserva la quantità di moto, tutta diretta lungo l'asse  $x$  :  $M \cdot V = M_1 \cdot V_1 + M_2 \cdot V_2$  da cui  $V_2 = \frac{MV - M_1 V_1}{M_2} = \frac{MV - M_1 x_1/t}{M - M_1} = -3.14 \text{ m/s}$

**Posizione scheggia n.2:**  $x_2 = V_2 \cdot t = -31.4 \text{ m}$

**Energia cinetica prima dell'urto:**  $T_{prima} = \frac{1}{2} MV^2 = 100 \text{ J}$

**Energia cinetica dopo l'urto:**  $T_{dopo} = \frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M_2 V_2^2 = 1643 \text{ J}$

**Energia fornita dall'esplosione:**  $T_{dopo} - T_{prima} = 1543 \text{ J}$



2. Le forze agenti sull'asta sono: la forza peso  $\mathbf{P}=\mathbf{mg}$  applicata nel baricentro G, la reazione normale del pavimento  $\mathbf{R}_B$  e l'attrito statico  $\mathbf{A}_s$  applicate in B, la reazione normale dalla parete obliqua  $\mathbf{R}_C$ . In condizione statiche devono essere contemporaneamente nulle entrambe le equazioni cardinali.

**Proiettando la 1ª equazione cardinale lungo  $x, y$ :**

$$\begin{cases} x) R_C \cos \theta - A_s = 0 \\ y) -R_C \sin \theta - P + R_B = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A_s = R_C \cos \theta \\ R_B = P + R_C \sin \theta \end{cases}$$

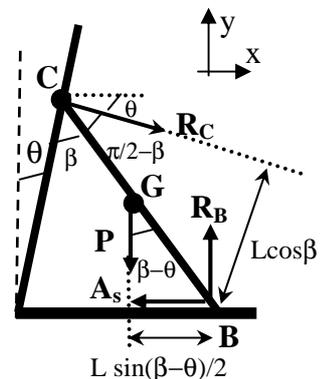
**Calcolando la 2ª equazione cardinale nel punto B**

$$M_{RC} + M_P = R_C L \cos \beta - PL \sin(\beta - \theta)/2 = 0 \quad (\text{verso positivo rotazione oraria in B})$$

$$\text{da cui si ricava l'intensità della forza } R_C = \frac{P \sin(\beta - \theta)}{2 \cos \beta}$$

combinando le equazioni si ottiene per l'attrito statico

$$A_s = R_C \cos \theta = \frac{P \sin(\beta - \theta) \cos \theta}{2 \cos \beta} \leq \mu_s R_B = \mu_s (P + R_C \sin \theta) = \mu_s P \left( 1 + \frac{\sin(\beta - \theta) \sin \theta}{2 \cos \beta} \right)$$



da cui il coefficiente minimo di attrito statico vale  $\mu_s \geq \frac{\sin(\beta - \theta)\cos\theta}{2\cos\beta + \sin(\beta - \theta)\sin\theta} = \mathbf{0.188}$

se invece la parete fosse verticale  $\theta=0$ , a parità di angolo  $\beta=30^\circ$ , si avrebbe  $\mu_s \geq \frac{\tan(\beta)}{2} = \mathbf{0.289}$

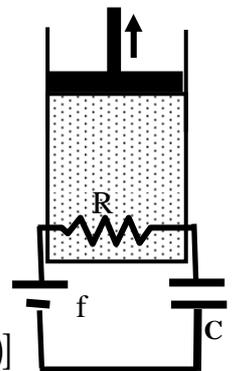
### 3. Carica ed energie dei componenti del circuito

Carica ai capi del condensatore  $q(t) = fC[1 - \exp(-t/\tau)]$  ove  $\tau = RC = 10s$

Energia immagazzinata nel condensatore  $E_c(t) = \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{f^2C}{2}[1 - \exp(-t/\tau)]^2$

Energia erogata dal generatore  $E_g(t) = fq = f^2C[1 - \exp(-t/\tau)]$

Energia dissipata per effetto Joule  $E_J(t) = E_g(t) - E_c(t) = \dots = \frac{f^2C}{2}[1 - \exp(-2t/\tau)]$



Per il **primo principio termodinamica:**

$$E_J(t) = L + \Delta U$$

ove la variazione di **energia interna**

$$\Delta U = nc_v \Delta T$$

ed il **lavoro** per trasformazione isobare di gas perfetti

$$L = p\Delta V = nR_{gas} \Delta T$$

per cui il primo principio si sintetizza come  $E_J(t) = n(c_v + R_{gas})\Delta T = nc_p \Delta T$   $\left[ c_p = \frac{5R_{gas}}{2} \right]$

da cui l'**aumento di temperatura** vale  $\Delta T = \frac{E_J(t)}{nc_p}$  ed il **lavoro**  $L = nR_{gas} \Delta T = \frac{nR_{gas}}{nc_p} E_J = \frac{2}{5} E_J$

**Calcolo numerico** dopo (A)  $t=20s$ , o dopo un tempo suff. lungo (B)  $t=\infty$

**Energia immagazzinata condensatore:**  $E_{cA}=7476 \text{ J}$  dopo 20s;  $E_{cB}=10 \text{ kJ}$  dopo lungo tempo

**Calore prodotto sulla resistenza:**  $E_{JA}=9817 \text{ J}$  dopo 20s;  $E_{JB}=10 \text{ kJ}$  dopo lungo tempo

**Lavoro utile termodinamico:**  $L_A=3927 \text{ J}$  dopo 20s;  $L_B=4 \text{ kJ}$  dopo lungo tempo

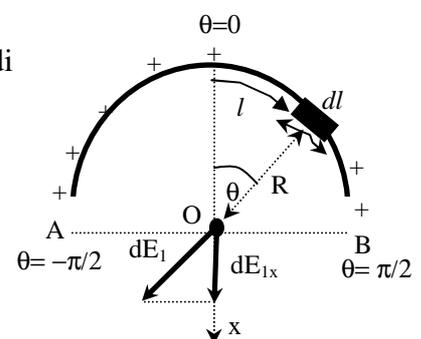
**Aumento temperatura del gas:**  $\Delta T_A=4.72 \text{ }^\circ\text{C}$  dopo 20s;  $\Delta T_B=4.81 \text{ }^\circ\text{C}$  dopo lungo tempo

4. La distribuzione complessiva viene vista come la sovrapposizione di due distribuzioni di carica disposte su semicirconferenze

#### Campo elettrico generato da una semicirconferenza

$Q_1$  è distribuita sulla semicirconferenza

con densità lineare uniforme  $\lambda_1 = Q_1/\pi R$ .



La carica disposta nel tratto  $d\ell = R d\theta$ , vale  $dq = \lambda_1 d\ell = \lambda_1 R d\theta$

e genera nel punto O un contributo  $dE_1 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R} d\theta$  lungo la direzione in figura

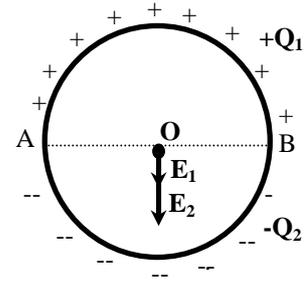
Per ragioni di simmetria il campo elettrico risultante sarà diretto lungo l'asse delle x per cui

$$E_1 = E_{1,x} = \int dE_{1,x} = \int dE_1 \cos\theta = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R} [\sin\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q_1}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

## Campo elettrico generato dall'intero anello

Il secondo semianello genera in O un secondo campo elettrico  $E_2$  equiverso che si calcola con la stessa formula dimostrata precedentemente e che si somma costruttivamente con  $E_1$

$$E_{tot} = E_1 + E_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} = 4.58 \cdot 10^8 \text{ V/m}$$



5. La spira quadrata CDEF è sottoposta a forze magnetiche dovute alla corrente  $I_1$  che scorre nella spira stessa (che hanno però risultante nulla) e a forze dovute alla corrente  $I_2$  che scorre nel filo rettilineo (che invece hanno risultante non nulla lungo l'asse x).

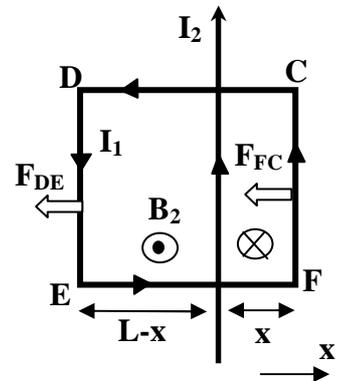
### Forze non compensate agenti lungo l'asse x

Applicando la 2ª formula di Laplace  $\vec{F} = I_1 \int d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2$  sui tratti FC e ED

$$F_{FC} = B_2 I_1 L = \frac{\mu_0}{2\pi x} I_1 I_2 L = 3 \cdot 10^{-6} \text{ N} \quad (\text{con verso opposto all'asse } x)$$

$$F_{DE} = B_2 I_1 L = \frac{\mu_0}{2\pi(L-x)} I_1 I_2 L = 2 \cdot 10^{-6} \text{ N} \quad (\text{con verso opposto all'asse } x)$$

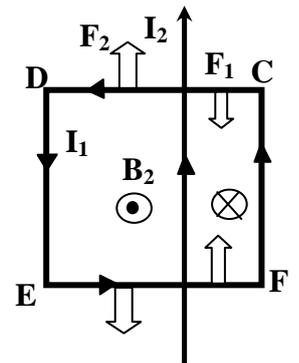
La forza totale è  $F_{tot} = F_{DE} + F_{FC} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{L^2}{x(L-x)} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ N}$  (opposto asse x)



### Facoltativo:

$$F_{CD} = F_2 - F_1 = I_1 \int_0^{L-x} \left( \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \xi} \right) d\xi - I_1 \int_0^x \left( \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \xi} \right) d\xi = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left( \frac{L-x}{x} \right) \quad (\text{verso l'alto})$$

il contributo  $F_{EF}$  è uguale è opposto.





# FISICA

A.A. 2012-2013

Ingegneria Gestionale

Soluzioni :SECONDO ESONERO

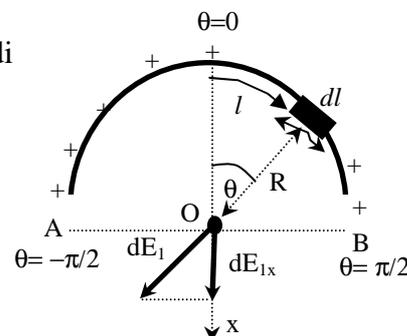
1° appello del 12 Giugno 2013

1. La distribuzione complessiva viene vista come la sovrapposizione di due distribuzioni di carica disposte su semicirconferenze

## Campo elettrico generato da una semicirconferenza

$Q_1$  è distribuita sulla semicirconferenza

con densità lineare uniforme  $\lambda_1 = Q_1 / \pi R$ .



La carica disposta nel tratto  $d\ell = R d\theta$ , vale  $dq = \lambda_1 d\ell = \lambda_1 R d\theta$

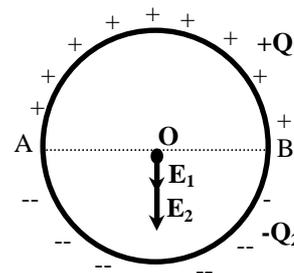
e genera nel punto O un contributo  $dE_1 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R} d\theta$  lungo la direzione in figura

Per ragioni di simmetria il campo elettrico risultante sarà diretto lungo l'asse delle x per cui

$$E_1 = E_{1,x} = \int dE_{1,x} = \int dE_1 \cos \theta = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q_1}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

## Campo elettrico generato dall'intero anello

Il secondo semianello genera in O un secondo campo elettrico  $E_2$  equiverso che si calcola con la stessa formula dimostrata precedentemente e che si somma costruttivamente con  $E_1$



$$E_{tot} = E_1 + E_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} = 4.58 \cdot 10^8 \text{ V/m}$$

## 2. Campo elettrico in un punto P interno alla cavità.

La distribuzione può pensarsi come sovrapposizione di due distribuzioni sferiche uniformi:

- (1) una distribuzione sferica di raggio  $R_1$  con centro in O e densità uniforme

$$\rho = \frac{Q}{Vol} = \frac{Q}{4\pi(R_1^3 - R_2^3)/3}$$

- (2) una distribuzione sferica di raggio  $R_2$  e centro in A con densità uniforme opposta  $-\rho$

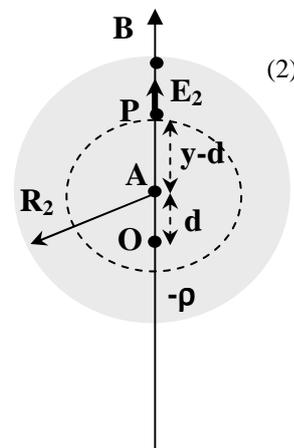
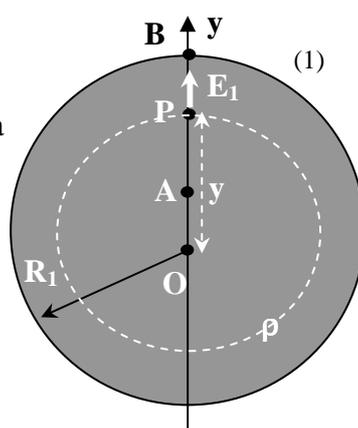
Le due sfere sono eccentriche poiché  $OA = d = R_1 - R_2 = 2\text{cm}$

### Campo elettrico interno alla prima sfera (1):

Per calcolare il campo elettrico  $E_1$  in P si applica la legge di Gauss alla sfera di raggio  $OP = y$

$$\Phi(E_1) = 4\pi y^2 E_1 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \left( \frac{4}{3} \pi y^3 \right)}{\epsilon_0}$$

$$\text{da cui } E_1(y) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} y$$



### Campo elettrico interno alla seconda sfera (2):

Per calcolare il campo elettrico  $E_2$  in P si applica la legge di Gauss alla sfera di raggio  $AP=(y-d)$

da cui  $E_2(y) = \frac{-\rho}{3\epsilon_0}(y-d)$  (contributo negativo che ha senso opposto a quello indicato in figura).

$$\text{Il campo totale } E_{tot} = E_1 + E_2 = \frac{\rho y - \rho(y-d)}{3\epsilon_0} = \frac{\rho d}{3\epsilon_0} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0(R_1^3 - R_2^3)} = \frac{Q(R_1 - R_2)}{4\pi\epsilon_0(R_1^3 - R_2^3)} = 3.69 \cdot 10^7 \text{ V/m}$$

(campo uniforme nella direzione y)

La differenza di potenziale fra il centro O ed il punto B dove è posizionata la carica di prova q vale

$$V_O - V_B = \int_0^{R_1} E_{tot} dy = E_{tot} R_1 = \frac{Q(R_1 - R_2)R_1}{4\pi\epsilon_0(R_1^3 - R_2^3)} = 3.69 \cdot 10^6 \text{ V}$$

### Calcolo della velocità minima

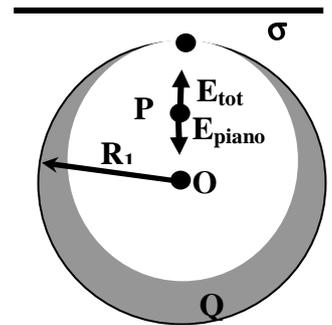
Dalla conservazione dell'energia tra B ed O ed imponendo  $w_o=0$  si ha  $\frac{1}{2}mw_B^2 + qV_B = qV_A$

$$\text{da cui la velocità minima } w_B = \sqrt{\frac{2q}{m}(V_O - V_B)} = \sqrt{\frac{Q \cdot q(R_1 - R_2)R_1}{2\pi\epsilon_0 m(R_1^3 - R_2^3)}} = 8.59 \text{ m/s}$$

**Facoltativo:** per annullare il campo  $E_{tot}$  in cavità è necessario generare

un campo uniforme  $E_{piano} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  contrastante tale che  $E_{piano} = E_{tot}$

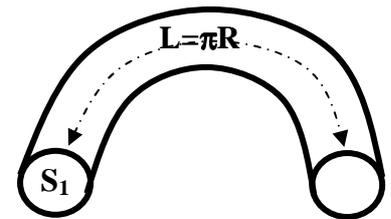
$$\text{da cui } \sigma = \frac{Q(R_1 - R_2)}{2\pi(R_1^3 - R_2^3)} = 652 \cdot \mu\text{C/m}^2$$



### 3. Calcolo delle resistenze elettriche della struttura toroidale

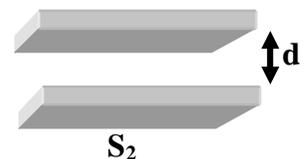
Dalla seconda legge di Ohm, ciascun tratto toroidale presenta una resistenza elettrica

$$R_1 = R_2 = \rho \frac{L}{S_1} = \rho \frac{\pi R}{S_1}$$



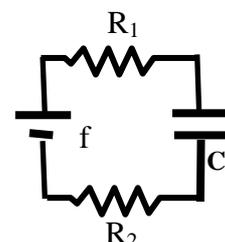
Mentre la capacità del condensatore piano è data da

$$C = \epsilon_0 \frac{S_2}{d}$$



Il circuito RC è quindi schematizzabile come in figura con un tempo caratteristico del processo di carica

$$\tau = (R_1 + R_2)C = \rho \frac{2\pi R}{S_1} \epsilon_0 \frac{S_2}{d} = (\rho \epsilon_0) \left( \frac{S_2}{S_1} \right) \left( \frac{2\pi R}{d} \right)$$



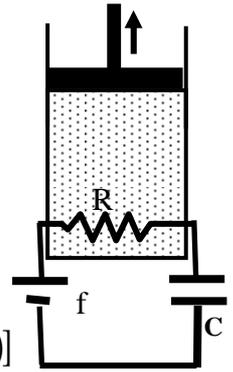
#### 4. Carica ed energie dei componenti del circuito

Carica ai capi del condensatore  $q(t) = fC[1 - \exp(-t/\tau)]$  ove  $\tau = RC = 10s$

Energia immagazzinata nel condensatore  $E_c(t) = \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{f^2 C}{2} [1 - \exp(-t/\tau)]^2$

Energia erogata dal generatore  $E_g(t) = fq = f^2 C [1 - \exp(-t/\tau)]$

**Energia dissipata per effetto Joule**  $E_J(t) = E_g(t) - E_c(t) = \dots = \frac{f^2 C}{2} [1 - \exp(-2t/\tau)]$



Per il **primo principio termodinamica:**

$$E_J(t) = L + \Delta U$$

ove la variazione di **energia interna**

$$\Delta U = nc_v \Delta T$$

ed il **lavoro** per trasformazione isobare di gas perfetti

$$L = p\Delta V = nR_{gas} \Delta T$$

per cui il primo principio si sintetizza come

$$E_J(t) = n(c_v + R_{gas}) \Delta T = nc_p \Delta T \quad \left[ c_p = \frac{5R_{gas}}{2} \right]$$

da cui l'aumento di temperatura vale  $\Delta T = \frac{E_J(t)}{nc_p}$  ed il lavoro  $L = nR_{gas} \Delta T = \frac{nR_{gas}}{nc_p} E_J = \frac{2}{5} E_J$

**Calcolo numerico** dopo (A)  $t=20s$ , o dopo un tempo suff. lungo (B)  $t=\infty$

**Energia immagazzinata condensatore:**  $E_{cA}=7476 \text{ J}$  dopo 20s;  $E_{cB}=10 \text{ kJ}$  dopo lungo tempo

**Calore prodotto sulla resistenza:**  $E_{JA}=9817 \text{ J}$  dopo 20s;  $E_{JB}=10 \text{ kJ}$  dopo lungo tempo

**Lavoro utile termodinamico:**  $L_A=3927 \text{ J}$  dopo 20s;  $L_B=4 \text{ kJ}$  dopo lungo tempo

**Aumento temperatura del gas:**  $\Delta T_A=4.72 \text{ }^\circ\text{C}$  dopo 20s;  $\Delta T_B=4.81 \text{ }^\circ\text{C}$  dopo lungo tempo

5. La spira quadrata CDEF è sottoposta a forze magnetiche dovute alla corrente  $I_1$  che scorre nella spira stessa (che hanno però risultante nulla) e a forze dovute alla corrente  $I_2$  che scorre nel filo rettilineo (che invece hanno risultante non nulla lungo l'asse x).

**Forze non compensate agenti lungo l'asse x**

Applicando la 2ª formula di Laplace  $\vec{F} = I_1 \int d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2$  sui tratti FC e ED

$$F_{FC} = B_2 I_1 L = \frac{\mu_o}{2\pi x} I_1 I_2 L = 3 \cdot 10^{-6} \text{ N} \quad (\text{con verso opposto all'asse x})$$

$$F_{DE} = B_2 I_1 L = \frac{\mu_o}{2\pi(L-x)} I_1 I_2 L = 2 \cdot 10^{-6} \text{ N} \quad (\text{con verso opposto all'asse x})$$

$$\text{La forza totale è } F_{tot} = F_{DE} + F_{FC} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi} \frac{L^2}{x(L-x)} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ N} \quad (\text{opposto asse x})$$

**Facoltativo:**

$$F_{CD} = F_2 - F_1 = I_1 \int_0^{L-x} \left( \frac{\mu_o I_2}{2\pi \xi} \right) d\xi - I_1 \int_0^x \left( \frac{\mu_o I_2}{2\pi \xi} \right) d\xi = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi} \ln \left( \frac{L-x}{x} \right) \quad (\text{verso l'alto})$$

il contributo  $F_{EF}$  è uguale è opposto.

