Università di Roma "La Sapienza"

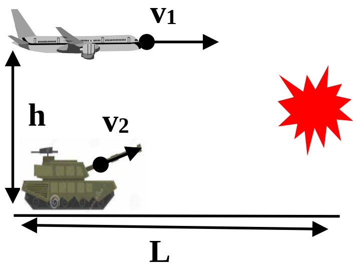
Facoltà di Ingegneria

A.A. 2022-2023

Ingegneria Gestionale (M-Z)

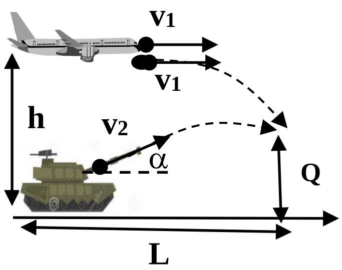
Testo e Soluzioni I Appello del 20 Giugno 2023

1. Testo. Un bombardiere vola a bassa quota h=1km, con velocità costante v_1=400 km/h diretta orizzontalmente. Il pilota avvista un obiettivo e sgancia una bomba senza imprimere alcuna velocità relativa. In quello stesso istante un sistema contraereo, posizionato a terra esattamente sotto l'aereo fa partire un razzo con velocità iniziale v_2 inclinata di un angolo α=50° rispetto all'orizzontale con il difficile obiettivo di abbattere la bomba in volo. Determinare il valore v_2 necessario per compiere tale missione. Calcolare inoltre in quale istante avviene l'abbattimento, dandone le coordinate rispetto al sistema contraereo (altezza dal suolo e ascissa L).



1. Soluzione. Moto della bomba

La bomba viene lasciata cadere dall'aereo dal punto (0,h) inizialmente con la stessa velocità v_1 orizzontale dell'aereo. Scomponendo il moto secondo gli assi:



lungo x $\begin{cases} v_{x1} = v_1 \\ x_1(t) = v_1 t \end{cases}$ e lungo y $\begin{cases} v_{y1} = -gt \\ y_1(t) = h - gt^2/2 \end{cases}$.

Il razzo viene lanciato invece dall'origine (0,0) inizialmente con la velocità v_2 inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale. Scomponendo il moto secondo gli assi:

lungo x $\begin{cases} v_{x2} = v_2 cos\alpha \\ x_2(t) = v_2 t cos\alpha \end{cases}$ e lungo y $\begin{cases} v_{y2} = v_2 sin\alpha - gt \\ y_2(t) = v_2 t sin\alpha - gt^2/2 \end{cases}$

Imponendo una delle due condizioni di collisione $x_2(t)=x_1(t)$,

$v_2 t cos\alpha = v_1 t$ e semplificando l'incognita tempo si ricava la **velocità iniziale del razzo** $v_2 = \frac{v_1}{cos\alpha}$ **= 173 m/s = 622 km/h**

Imponendo la seconda condizione di collisione $y_2(t)=y_1(t)$,

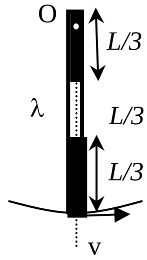
$v_2 t sin\alpha - gt^2/2 = h - gt^2/2$ si ottiene il **tempo finale** $t = \frac{h}{v_2 sin\alpha} = \frac{h}{v_1} cotg\alpha$ **=7.55 s**

Le coordinate si ottengono sostituendo il tempo nei moti componenti con cui è scomposto il moto parabolica della bomba (o alternativamente del razzo).

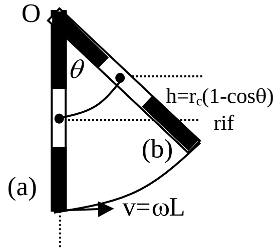
Ascissa del punto di collisione: **L**=$x_1(t) = v_1 t = h cotg\alpha$ **=839 m**

Ordinata del punto di collisione: **Q**=$y_1(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$ **=721 m**

2. Testo. Un pendolo composto è formato da un'asta rigida omogenea di lunghezza L=30 cm e massa distribuita con densità λ=10 kg/m simmetricamente in due tratti di lunghezza L/3 posizionati ai due estremi della barra (il tratto centrale risulta quindi privo di massa con sola funzione di collegamento) libera di ruotare in un piano verticale intorno al cardine O coincidente con un estremo dell'asta. Supponendo di imprimere una piccola velocità v=0.2 m/s all'estremo libero dell'asta, determinare l'angolo massimo di oscillazione del sistema ed il periodo delle piccole oscillazioni.



2. Soluzione. **Momento di inerzia e centro di massa dell'asta**



L'asta rigida ha un momento di inerzia calcolato rispetto all'asse di rotazione per O:

$$I_o = \int r^2 dm = \int_0^{L/3} \lambda r^2 dr + \int_{2L/3}^{L} \lambda r^2 dr = \lambda \left[\frac{(L/3)^3}{3} + \frac{L^3 - (2L/3)^3}{3}\right]$$

$$= \lambda \left[\frac{L^3}{81} + \frac{19L^3}{81}\right] = \frac{20}{81}\lambda L^3$$

Mentre il centro di massa C è posizionato al centro della barra, alla distanza dal punto O

$$r_C = \frac{\int r dm}{M} = \frac{\int_0^{L/3} \lambda r dr + \int_{2L/3}^{L} \lambda r dr}{\lambda(2/3)L} = \left[\frac{(L/3)^2}{2} + \frac{L^2 - (2L/3)^2}{2}\right]\frac{3}{2L} = \left[\frac{L^2}{18} + \frac{5L^2}{18}\right]\frac{3}{2L} = \frac{L}{2}$$

dove si è assunto per la massa della barra $M = \left(\frac{2\lambda L}{3}\right)$. Ciò dimostra che il centro di massa della barra è proprio al centro $r_C = L/2$

Conservazione dell'energia meccanica

Calcolo energia meccanica nello stato (a)
Assumendo nulla l'energia potenziale (calcolata nel centro di massa) nello stato di partenza (a) dove il pendolo è alla minima quota, l'energia meccanica coincide con l'energia cinetica di rotazione, dove la velocità angolare di rotazione impressa ω_a è legata alla velocità dell'estremo libero $\omega_a = \frac{v}{L}$

$$E_{ma} = K_a = \frac{1}{2} I_o \omega_a^2 = \frac{1}{2} I_o \left(\frac{v}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{20}{81}\lambda L^3\right)\left(\frac{v^2}{L^2}\right) = \frac{10}{81}\lambda L v^2$$

Calcolo energia meccanica nello stato (b)
Essendo nulla l'energia cinetica nello stato (b) di massima quota, l'energia meccanica diviene

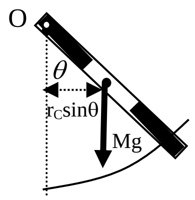
$$E_{mb} = U_b = Mgr_C h = \left(\frac{2\lambda L}{3}\right) g \left(\frac{L}{2}\right)(1 - \cos\theta) = \frac{1}{3}\lambda L^2 g(1 - \cos\theta)$$

Infine imponendo la conservazione dell'energia meccanica $E_{ma} = E_{mb}$

si può calcolare l'**angolo massimo di oscillazione** $\boldsymbol{\theta = \arccos\left[1 - \frac{10}{27}\frac{v^2}{gL}\right] = 0.1\, rad = 5° \, 45'}$

Calcolo del periodo di oscillazione:

Quando il pendolo composto è fuori dalla sua posizione di equilibrio, il momento delle due forze peso tende a far ruotare il sistema verso la posizione di equilibrio

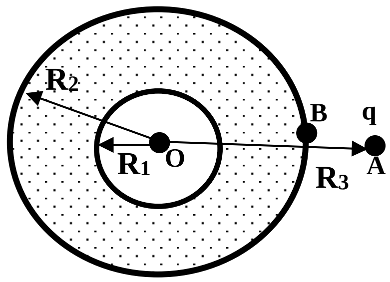


Applicando la seconda equazione cardinale $M_O^{ext} = \frac{db_o}{dt} = I_o \frac{d^2\theta}{dt^2}$
dove $M_O^{ext} = -Mgr_C \sin\theta \cong -\left(\frac{2\lambda L}{3}\right) g \frac{L}{2} \theta = -\left(\frac{\lambda L^2 g}{3}\right) \theta =$

L'equazione differenziale è quindi $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\lambda L^2 g}{3I_o}\right)\theta = 0$
che prevede piccole oscillazioni di periodo

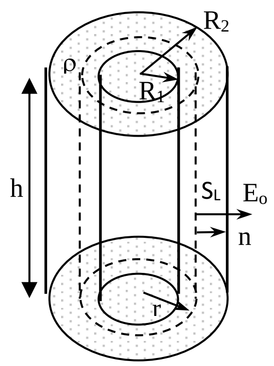
$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{3I_o}{\lambda L^2 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{20}{27}\frac{L}{g}} = 0.95\ \mathrm{s.}}$$

3. Testo. Una carica positiva è distribuita uniformemente con densità ρ=1C/m^3 nello spazio compreso fra due cilindri concentrici di raggi R_1=3cm e R_2=5cm e lunghezza infinita. Una carica puntiforme anch'essa positiva di valore q=1μC e di massa m=1g viene spostata da una forza esterna contro le forze del campo dal punto A situato ad una distanza R_3 =6cm dall'asse fino ad un punto O dell'asse. Determinare il lavoro minimo che è necessario compiere dalla forza esterna a tale scopo. Dovendo invece dal punto A raggiungere il punto B sulla superficie esterna determinare la velocità iniziale minima in A che bisogna imprimere per tal scopo.



3. Soluzione. Calcolo del campo elettrico
Applicando la legge di Gauss ad una superficie cilindrica coassiale chiusa Σ di raggio r e di altezza h, e sapendo che il flusso del campo elettrico fuoriesce solamente dalla superficie laterale del cilindro di Gauss di area $S_L=2\pi rh$ (non c'è flusso uscente dalle superfici di base del cilindro).

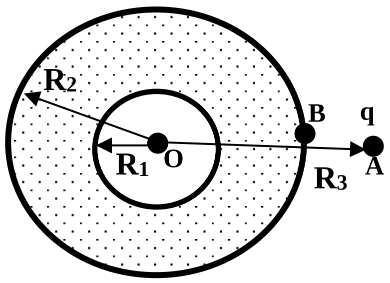
$\Phi_{SL} = \int_{SL} \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = (2\pi rh)E_o = Q_{int}/\varepsilon_o$



dove $Q_{int} \quad = \begin{cases} r < R_1 & 0 \\ R_1 < r < R_2 & \rho[\pi(r^2 - R_1^2)h] \\ r > R_2 & \rho[\pi(R_2^2 - R_1^2)h] \end{cases}$

da cui $E = \begin{cases} r < R_1 & 0 \\ R_1 < r < R_2 & \rho(r - R_1^2/r)/2\varepsilon_o \\ r > R_2 & \rho(R_2^2 - R_1^2)/2\varepsilon_o r \end{cases}$

La differenza di potenziale tra i punti O ed A estremi del tragitto si calcola come



$$\boldsymbol{V_O - V_A = \int_0^{R_3} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{2\varepsilon_o}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right) dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\varrho}{2\varepsilon_o}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\frac{dr}{r}}$$

$$\boldsymbol{V_O - V_A = \frac{\varrho}{2\varepsilon_o}\left[\left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} - R_1^2 ln\frac{R_2}{R_1}\right) + \left(R_2^2 - R_1^2\right) ln\frac{R_3}{R_2}\right] =}$$

$$\boldsymbol{V_O - V_A = \frac{\varrho}{2\varepsilon_o}\left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} - R_1^2 ln\frac{R_3}{R_1} + R_2^2 ln\frac{R_3}{R_2}\right] = 3.57\times10^7\ \text{V}}$$

La differenza di potenziale tra i punti B ed A si calcola come

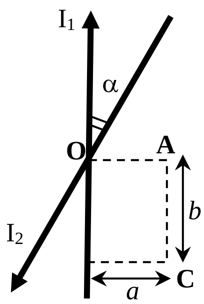
$$\boldsymbol{V_B - V_A = \int_{R_2}^{R_3} E dr = \int_{R_2}^{R_3} \frac{\varrho}{2\varepsilon_o}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\frac{dr}{r} = \frac{\varrho}{2\varepsilon_o}\left(R_2^2 - R_1^2\right) ln\frac{R_3}{R_2} = 1.65\times10^7\ \text{V}}$$

Il lavoro fatto dall'esterno per spostare la carica $+q=1\mu C$ dal punto O al punto A si ottiene esercitando una forza esterna punto per punto uguale e contraria alla forza elettrostatica e procedendo con un moto lento ($v\approx0$) in modo da trascurare gli effetti dell'energia cinetica.
In queste condizioni il **lavoro esterno vale** $\boldsymbol{L_{AO}^{ext} = -L_{AO}^{E} = L_{OA}^{E} = q(V_O - V_A) = 35.7\ \text{J}}$

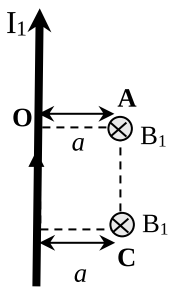
Quando invece la carica +q è lanciata in A con la velocità minima w_A in modo da raggiungere il punto B sulla superficie del cilindro esterno, fermarsi ed invertire il moto (energia cinetica nulla in B) dalla condizione di conservazione dell'energia tra il punto di partenza A e quello di arrivo B si ottiene

$K_A + qV_A = qV_B$ da cui la **velocità di lancio minima in A** è $\boldsymbol{w_{A,min} = \sqrt{\frac{2q(V_B - V_A)}{m}} = 182\ \text{m/s}}$

4. Testo. Due fili rettilinei indefinitamente lunghi sono disposti lungo un piano orizzontale in modo da intersecarsi nel punto O a causa dell'angolo di inclinazione mutua α. Sapendo che i due fili sono percorsi da correnti continue pari rispettivamente a I_1=5A e I_2=3A, determinare quale deve essere l'angolo di inclinazione α in modo che non si registri campo magnetico nel punto A. Determinare inoltre il modulo del vettore induzione magnetica misurato nel punto C. [**Dati**: a=4cm, b=8cm]

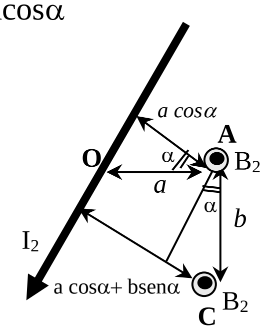


4. Soluzione. Il filo rettilineo indefinitamente lungo percorso dalla corrente I_1 genera nei punti A e C, entrambi alla stessa distanza *a* dal filo, un vettore induzione magnetica B_1 entrante nel piano del foglio in accordo alle legge di Biot-Savart



$$B_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi a}$$

Il secondo filo percorso dalla corrente I_2 genera il campo B_2 uscente dal piano del foglio con valore diverso nei punti A e C che distano dal filo rispettivamente $a\cos\alpha$ ed $a\cos\alpha + b\sin\alpha$



$$B_2 = \frac{\mu_o I_2}{2\pi a\cos\alpha} \text{ in } \mathbf{A}, \qquad B_2 = \frac{\mu_o I_2}{2\pi[a\cos\alpha + b\sin\alpha]} \text{ in } \mathbf{C}$$

Il vettore induzione complessivo si annulla in **A** quando $B_1=B_2$

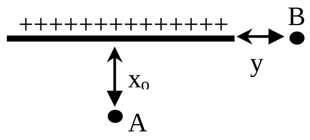
$$\frac{\mu_o I_1}{2\pi a} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi a\cos\alpha} \quad \text{da cui} \quad \alpha = \arccos(I_2/I_1) = \mathbf{53° \ 08'}$$

nel punto C $$B_{tot} = \frac{\mu_o}{2\pi a}\left[I_1 - \frac{I_2}{\cos\alpha + (b/a)\sin\alpha}\right] = \frac{\mu_o}{2\pi a}\left[I_1 - \frac{I_2 I_1}{I_2 + [b/a]\sqrt{I_1^2 - I_2^2}}\right] =$$

$$= \frac{\mu_o}{2\pi a}\left[\frac{bI_1\sqrt{I_1^2 - I_2^2}}{aI_2 + b\sqrt{I_1^2 - I_2^2}}\right] = \mathbf{18.2\ \mu T}$$

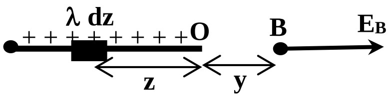
Integrazione di due esercizi solo ai fini del Secondo esonero

1. **Testo.** Una carica è distribuita uniformemente su di un segmento rettilineo finito di lunghezza L=6cm con densità lineica λ. Sapendo che nel punto A disposto sulla mediana alla distanza x_o=4cm dal filo si registra un campo elettrico E_A=100V/m, determinare la posizione del punto B sulla prosecuzione del segmento alla distanza y da esso dove il modulo del campo elettrico assume lo stesso valore. Determinare inoltre il valore della densità lineica λ.



1. Soluzione. Campo elettrico generato nel punto B

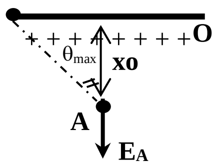
Il campo elettrico elementare è $dE = \dfrac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_o (z+y)^2}$



ed integrando

$$E_B = \int dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_O}\int_0^L \frac{dz}{(z+y)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_O}\left[-\frac{1}{z+y}\right]_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_O}\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y+L}\right] = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_O y(y+L)}$$

Campo elettrico generato nel punto A



Sfruttando le simmetrie si può dimostrare che il campo elettrico nel punto A vale

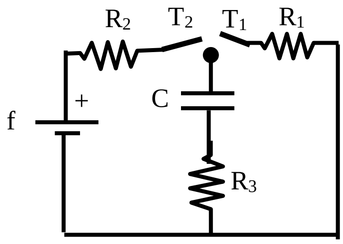
$$E_A = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o x_o}\sin\theta_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_O x_O}\frac{L/2}{\sqrt{x_O^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_O x_O\sqrt{x_O^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

Imponendo $E_A = E_B \;\rightarrow\; y(y+L) = x_O\sqrt{x_O^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}$

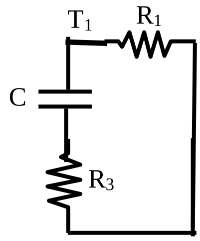
da cui la **distanza OB** vale $y = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x_O\sqrt{x_O^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{L}{2}$ =**2.4 cm**

mentre la **densità lineica** vale $\boldsymbol{\lambda = \frac{E_A}{L}\left(4\pi\varepsilon_O x_O\sqrt{x_O^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}\right)}$ =**0.37 nC/m**

3. Testo. Sul condensatore C è inizialmente presente una carica q_o=2μC. Nell'istante t=0 viene chiuso il solo tasto T_1 in modo che il condensatore possa scaricarsi sulla resistenza R_1. Dopo un tempo t_1=10 ms vengono azionati contemporaneamente gli interruttori T_1 (da chiuso ad aperto) e T_2 (da aperto a chiuso) così da poter ricaricare il condensatore tramite la forza elettromotrice f=3V. Determinare quanto tempo occorre per poter ricaricare il condensatore al livello di partenza q_o. [**Dati**: R_1=25kΩ, R_2=15kΩ, R_3=25kΩ, C=1μF]



3. Soluzione. Primo processo di scarica

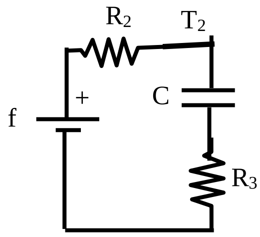


La resistenza di maglia è $R_{tot1} = R_1 + R_3 = 50$ kΩ

Il tempo caratteristico di scarica $\tau_1 = R_{tot1}C = \mathbf{50\ ms}$

La carica ai capi del condensatore dopo Δt_1 è quindi $q(\Delta t_1) = q_o \exp(-\Delta t_1/\tau_1)$

Secondo processo di carica



La resistenza di maglia è $R_{tot2} = R_2 + R_3 = 40$ kΩ

Il tempo di carica $\tau_2 = R_{tot2}C = \mathbf{40\ ms}$

A partire dal nuovo tempo t>0, ai capi del condensatore si registra
la sovrapposizione del processo di carica operata da f e quello di scarica della carica pre-esistente $q(t) = fC[1-\exp(-t/\tau_2)] + q(\Delta t_1)\exp[-t/\tau_2]$

Imponendo $q(\Delta t_2) = q_o$

si ottiene $fC[1 - exp(-\Delta t_2/\tau_2)] + q_o\, exp[-\Delta t_2/\tau_2]\, exp[-\Delta t_1/\tau_1] = q_o$

da cui $\exp(-\Delta t_2/\tau_2) = \dfrac{fC - q_o}{fC - q_o \exp[-\Delta t_1/\tau_1]}$ da cui $\Delta t_2 = \tau_2 \ln\left(\dfrac{fC - q_o \exp[-\Delta t_1/\tau_1]}{fC - q_o}\right) = \mathbf{12\ ms}$