FISICA APPLICATA

A.A. 2016-2017

1°prova - Testo e Soluzioni

CALCOLO VETTORIALE

1. Sommare i due vettori $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ e $\vec{B} = -2\hat{i} - 3\hat{j}$ calcolando, il modulo della risultante, l'angolo di inclinazione rispetto all'asse x, e le due componenti lungo x e d y.

   $$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \left(3\hat{i} + 4\hat{j}\right) + \left(-2\hat{i} - 3\hat{j}\right) = (3-2)\hat{i} + (4-3)\hat{j} = \hat{i} + \hat{j}$$

   Componenti $\begin{cases} R_x = 1 \\ R_y = 1 \end{cases}$ Modulo e inclinazione $\begin{cases} R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \arctan\left(R_y / R_x\right) = \arctan(1) = 45° \end{cases}$

   Sottrarre i due vettori $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ e $\hat{B} = -\hat{i} + \hat{j}$ calcolando, il modulo della risultante, l'angolo di inclinazione rispetto all'asse x, e le due componenti lungo x e d y.

2. Sottrarre i due vettori $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ e $\hat{B} = -\hat{i} + \hat{j}$ calcolando, il modulo della risultante, l'angolo di inclinazione rispetto all'asse x, e le due componenti lungo x e d y.

   $$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = \left(3\hat{i} + 4\hat{j}\right) - \left(-\hat{i} + \hat{j}\right) = (3+1)\hat{i} + (4-1)\hat{j} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$

   Componenti $\begin{cases} R_x = 4 \\ R_y = 3 \end{cases}$ Modulo e inclinazione $\begin{cases} R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = 5 \\ \alpha = \arctan\left(R_y / R_x\right) = \arctan(3/4) = 36°52' \end{cases}$

3. Moltiplicare scalarmente i vettori $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ e $\hat{B} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$

   $$\left(3\hat{i} + 4\hat{j}\right) \bullet \left(4\hat{i} - 3\hat{j}\right) = 3 \cdot 4 \cdot \hat{i} \cdot \hat{i} - 4 \cdot 3 \cdot \hat{j} \cdot \hat{j} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$$

4. Moltiplicare scalarmente i vettori $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ e $\hat{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$

   $$\left(3\hat{i} + 4\hat{j}\right) \bullet \left(4\hat{i} + 3\hat{j}\right) = 3 \cdot 4 \cdot \hat{i} \cdot \hat{i} + 4 \cdot 3 \cdot \hat{j} \cdot \hat{j} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$$

5. Moltiplicare vettorialmente i vettori $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j}$ e $\hat{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$

   $$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \hat{k} = [1 \cdot 3 - (-2 \cdot 4)]\hat{k} = 11\hat{k}$$

PROBLEMI DI CINEMATICA

1. Un aeroplano percorre 2100 km ad una velocità di 800 km/h, poi incontra un vento di coda che fa aumentare la sua velocità a 100 km/h per i successivi 1800 km. Qual è la velocità scalare media in questo viaggio.

1. Nel primo tratto l'aereo percorre lo spazio $s_1 = v_1 \Delta t_1$ in un tempo

$$\Delta t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{2100 \cdot 1000m}{\frac{800}{3.6}\frac{m}{s}} = 9450s$$

Nel secondo tratto l'aereo percorre lo spazio $s_2 = v_2 \Delta t_2$ in un tempo

$$\Delta t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{1800 \cdot 1000m}{\frac{900}{3.6}\frac{m}{s}} = 7200s$$

La velocità media si ottiene $V_m = \dfrac{s_1 + s_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dfrac{3900 \cdot 1000m}{(9450 + 7200)s} = 234\dfrac{m}{s} = 843\dfrac{km}{h}$

2. Una automobile sportiva accelera partendo da ferma fino a 95km/h in 6.2 secondi. Quale è la sua accelerazione media?

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(95/3.6 - 0) \quad m/s}{6.2 \quad s} = \frac{26.4 \quad m/s}{6.2 \quad s} = 4.26 \quad m/s^2$$

3. Nel fermarsi un'automobile lascia i segni di una frenata per 80 metri . Assumendo una decelerazione di 7 m/s^2 stimare la velocità della macchina appena prima di iniziare a frenare

3. Le equazioni del moto uniformemente ritardato sono le seguenti:

$$\begin{cases} a(t) = -a_o \\ v(t) = v_o - a_o \cdot t \\ x(t) = v_o \cdot t - \dfrac{a_o}{2} \cdot t^2 \end{cases}$$

dalla seconda $v_o - a_o t = 0$ si ottiene l'istante in cui la macchina si ferma

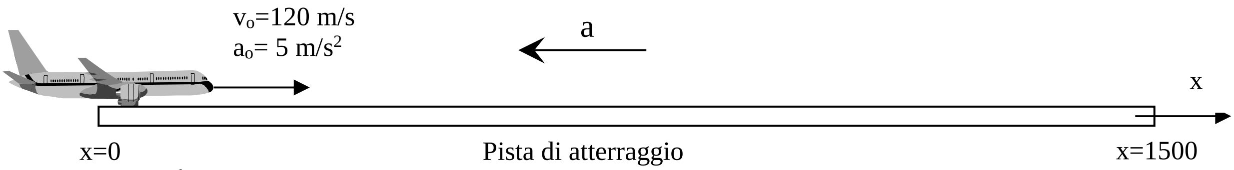
$t = \dfrac{v_o}{a_o}$. Questo risultato viene inserito nella terza equazione $L = x(t) = v_o\left(\dfrac{v_o}{a_o}\right) - \dfrac{a_o}{2}\left(\dfrac{v_o}{a_o}\right)^2 = \dfrac{v_o^2}{2a_o}$

Da cui si calcola la velocità iniziale $v_o = \sqrt{2a_o L} = \sqrt{2 \cdot (7\,m/s^2)80m} = \sqrt{1120}\,m/s = 33.5\,m/s$

PROBLEMI COMPLESSI DI CINEMATICA: MOTO RETTILINEO

1. Un aereo atterra ad una velocità orizzontale di *120 m/s* e, per fermarsi, è costretto a decelerare bruscamente con accelerazione uniforme di valore assoluto $a_o = 5m/s^2$. (a) Dall'istante in cui esso tocca il suolo, qual è l'intervallo di tempo necessario per fermarsi? (b) Può questo aereo atterrare su una piccola isola tropicale, che possiede un aeroporto con una pista lunga *1.5Km*?

1. Il moto è rettilineo uniformemente ritardato con accelerazione costante negativa $a(t) = -a_o$ di valore assoluto $a_o = 5m/s^2$. Il velivolo tocca il suolo all'istante iniziale $t=0$, in un punto che facciamo coincidere con l'origine del sistema di riferimento $x(t=0)=x_o=0$ con una velocità iniziale positiva $v(t=0)=v_o=120\,m/s$. Le equazioni della cinematica si ottengono integrando l'espressione dell'accelerazione come segue



$$\begin{cases} a(t)=-a_o \\ v(t)=v_o-a_o\cdot t \\ x(t)=x_o+v_o\cdot t-\frac{a_o}{2}\cdot t^2 \end{cases} \quad \text{con i seguenti valori iniziali} \quad \begin{cases} a_o=5\,m/s^2 \\ v_o=120\,m/s \\ x_o=0 \end{cases}$$

Il tempo di arresto t_{fin} si trova annullando l'equazione della velocità $v(t_{fin})=v_o-a_o t_{fin}=0$ da cui si ricava $t_{fin}=v_o/a_o=120/5=24s$. Dall'equazione dello spazio si ricava lo spazio di frenata come $x(t_{fin})=v_o t_{fin}-a_o t_{fin}^2/2=v_o^2/a_o-v_o^2/2a_o=v_o^2/2a_o=1440m$. Essendo la pista leggermente più lunga (1500m) dello spazio di frenata tale aereo potrebbe riuscire ad atterrare!

2. Un'auto ed un treno si muovono, alla velocità di v_o=*25 m/s*, lungo percorsi paralleli. Alla comparsa del segnale rosso di un semaforo, la macchina frena venendo così sottoposta ad una decelerazione uniforme di valore $a=-2.5\ m/s^2$ fino all'arresto. L'auto rimane ferma per 45 secondi, quindi accelera uniformemente con $a=2.5\ m/s^2$ fino a riacquistare la velocità di v_o=*25 m/s*. Se assume che il treno abbia sempre mantenuto la velocità di v_o=*25 m/s*, qual è la distanza dell'auto dal treno, quando l'auto raggiunge nuovamente la velocità v_o?

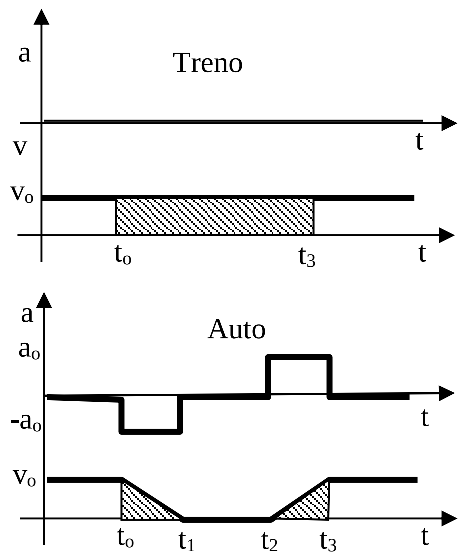
2. Il moto del treno è rettilineo uniforme mentre quello dell'autovettura è rettilineo vario. Se si indicano con t_o, t_1, t_2, t_3 gli istanti di tempo in cui l'auto rispettivamente comincia a decelerare (t_o), si ferma (t_1), comincia ad accelerare (t_2), riprende il moto rettilineo uniforme (t_3), si possono tracciare i grafici di accelerazione e velocità e scrivere le relazioni cinematiche

$$\{\forall t \qquad v_{treno}(t)=v_o$$

$$\begin{cases} t<t_o, & v_{auto}(t)=v_o \\ t_o\le t<t_1, & v_{auto}(t)=v_o-a_o(t-t_o) \\ t_1\le t<t_2, & v_{auto}(t)=0 \\ t_2\le t<t_3, & v_{auto}(t)=a_0(t-t_2) \\ t\ge t_3, & v_{auto}(t)=v_o \end{cases}$$

DATI

$$\begin{cases} v_o=25\,m/s \\ a_o=2.5\,m/s \\ \Delta T=t_2-t_1=45s \end{cases}$$

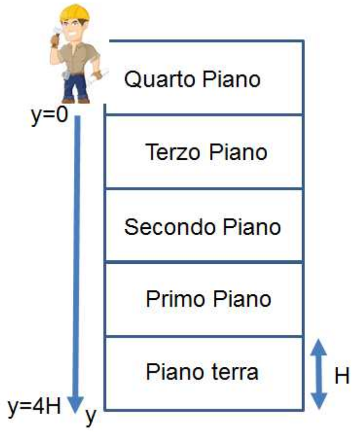


Gli intervalli di tempo si ricavano come segue:
l'intervallo di frenata t_1-t_o: dall'annullamento della velocità dell'auto in t_1 si ha $v(t_1)=v_o-a_o*(t_1-t_o)=0$ da cui $t_1-t_o=v_o/a_o$
l'intervallo in cui accelera t_3-t_2: dal raggiungimento della velocità di regime in t_3 si ha $v(t_3)=v_o=a_o*(t_3-t_2)=0$ da cui $t_3-t_2=v_o/a_o$. Lo spazio percorso nell'intervallo da t_o a t_3, si ottiene dal grafico delle velocità misurando l'area tratteggiata.

L'auto percorre uno spazio pari ai due triangoli $\Delta s_{auto} = \frac{1}{2}(t_1 - t_o)v_o + \frac{1}{2}(t_3 - t_2)v_o = \frac{v_0^2}{a_o} = 250m$

Nel frattempo il treno ha percorso lo spazio pari al rettangolo tratteggiato $\Delta s_{treno} = (t_3 - t_0)v_o = \left(\frac{v_o}{a_0} + \Delta T + \frac{v_0}{a_0}\right)v_0 = (10 + 45 + 10)\cdot 25 = 1625m$. La differenza degli spazi percorsi *è quindi* $x_{treno}(t_3) - x_{auto}(t_3) = 1625 - 250 = 1375m$

3. Un operaio si trova ad intervenire per lavori edili al 4 piano di una palazzina dove sono state allestite delle impalcature. Camminando sull'impalcatura egli mette un piede in fallo e rovina a terra. Determinare dopo quanti secondi e a quale velocità impatta con il terreno. Si assuma che l'altezza di un singolo piano è quello di 2.70 m vigente nella normativa italiana .



3. Le equazioni del moto uniformemente accelerato sono le seguenti:

$$\begin{cases} a(t) = g \\ v(t) = g \cdot t \\ y(t) = \frac{g}{2}\cdot t^2 \end{cases}$$

dove l'asse delle y è stato orientato verso il basso, cosicché a=g.

Il tempo di volo si calcola imponendoQuesto risultato viene inserito nella terza equazione $y(t) = \frac{gt^2}{2} = 4H$ da cui $t = \sqrt{\frac{8H}{g}} =$ **1.48 s**

Da cui si calcola la velocità di impatto $v_{fin} = g * t = \sqrt{8gH} = \sqrt{8 \cdot (9.8\, m/s^2)2.7m} =$ **14.5 m/s**