# Teoria degli errori

Illustriamo alcuni concetti della teoria della misura con un esempio(1).

Si supponga di voler determinare la profondità di un pozzo gettando in esso un sasso(2).
Per ottenere una misura diretta della profondità dovremmo eseguire una serie di operazioni che porti al confronto di questa grandezza con l'unità di misura ad essa omogenea(3). Alternativamente si può pensare a una misura derivata in cui si misura il tempo impiegato dal sasso per giungere in fondo al pozzo.

Seguiamo questa seconda strada: possiamo misurare con un cronometro(4) il tempo necessario affinché il sasso, lasciato cadere dall'imboccatura del pozzo, raggiunga il fondo. A questo punto abbiamo bisogno di una relazione fra la profondità del pozzo e il tempo impiegato dal sasso per raggiungerne il fondo. Questa relazione deve essere nota con almeno la stessa accuratezza che richiediamo alla nostra misura.

Dobbiamo quindi creare un modello della realtà, analizzarlo dal punto di vista delle leggi fisiche e infine tradurlo in relazioni matematiche.
Una prima schematizzazione potrebbe consistere nel considerare la caduta del sasso come se avvenisse nel vuoto. In questo caso dall'equazione del moto si otterrebbe:

$$h = \tfrac{1}{2} g\, t^2 \qquad (1)$$

in cui "h" rappresenta la profondità incognita del pozzo, "g = 9,8 m/s$^2$" l'accelerazione di gravità e "t" il tempo misurato direttamente con un cronometro.
La misurazione si svolgerebbe nel seguente modo(5): il misuratore lascia cadere il sasso mentre fa partire il cronometro; quando sente il tonfo del sasso nell'acqua arresta il cronometro; l'indicazione del cronometro rappresenterà il tempo "t" da introdurre nella relazione (1).

Ci aspettiamo di trovare un solo valore(6) dal quale ricavare esattamente la profondità cercata? Se ripetessimo più volte la misurazione otterremmo una serie di misure di tempo simili tra loro ma non coincidenti. Ciò può essere dovuto a diversi motivi:
- non perfetto sincronismo fra il momento del rilascio del sasso e l'inizio del conteggio da parte del cronometro dovuto al ritardo dei riflessi del misuratore
- non perfetto sincronismo fra il momento in cui viene percepito il tonfo del sasso e l'istante in cui viene arrestato il cronometro
- velocità iniziale del sasso non nulla.

---

[1] L'esempio ha validità didattica; all'interno di questo corso la fase preparatoria delle misurazioni da svolgere in laboratorio non viene delegata allo studente. È però istruttivo e consigliato provare ad immaginare alcuni esempi di misurazione ed analizzarli nei termini descritti in queste note

[2] La profondità del pozzo è il **misurando.** Stiamo definendo il **metodo di misurazione**: lanciamo un sasso (misura derivata) anziché adoperare un regolo (misura diretta)

[3] Dovendo adottare il Sistema Internazionale, l'unità di misura della profondità (omogenea ad una lunghezza) è il metro. Ovviamente non ricorreremmo al confronto diretto col campione (cosa peraltro impossibile poiché in questo caso si tratta di una definizione) ma con un regolo che riporti delle incisioni (tacche) la cui distanza è determinata a partire dalla definizione del campione primario o più realisticamente da un campione secondario.

[4] Il funzionamento del cronometro si basa su un oscillatore il cui periodo è in relazione nota con il campione di unità di misura del tempo.

[5] Stiamo definendo la **procedura di misurazione**

[6] Tale valore è detto **valore vero**. Poiché la definizione del misurando non può esssere infinitamente precisa, possono esistere più valori veri.

Questo tipo di cause porta a valori diversi fra una misura e la successiva; esse producono effetti di piccola entità che però non sono né riproducibili, né prevedibili perché variano casualmente. Vengono chiamate **errori casuali**.

**Gli errori[(7)] sono la differenza fra il risultato di una misura e il valore vero cercato.**

Per eliminare questa non riproducibilità si può agire in tre direzioni a seconda del risultato che si vuole ottenere:
- se non è importante distinguere, p.es., fra una profondità di 10 metri e una di 11 metri si può utilizzare un cronometro in grado di apprezzare solo i decimi di secondo. La scarsa sensibilità dello strumento maschererà l'effetto degli errori casuali
- se è possibile eseguire molte misure nelle stesse condizioni si possono utilizzare metodi statistici[(8)] per ridurre l'effetto degli errori casuali
- se si possono effettuare solo poche misurazioni, o al limite una sola, è necessario cambiare strumentazione[(9)], p.es. si può utilizzare un cronometro elettronico attivato dallo sblocco di un elettromagnete che lascia cadere il sasso con velocità nulla e si arresta quando il suono del tonfo arriva a un microfono.

È però illusorio pensare di poter eliminare del tutto gli errori casuali modificando la strumentazione: il cronometro, per quanto sensibile, non sarà mai in grado di apprezzare intervalli temporali inferiori al periodo del suo oscillatore interno, i dispositivi elettromeccanici risentono delle vibrazioni, la smagnetizzazione non è istantanea, i dispositivi elettronici sono disturbati dai campi elettromagnetici , etc.

La presenza degli errori casuali viene facilmente evidenziata ripetendo più volte la misurazione nelle stesse condizioni: se la sensibilità della strumentazione lo consente, si otterranno valori non coincidenti fra loro; lo scarto fra i valori delle varie misure è indice dell'entità degli errori casuali presenti nella misurazione.

Esiste però un'altra serie di cause che possono alterare il risultato della misura e produrre valori che si discostano da quello teorico:
- la formula (1) non considera l'attrito con l'aria
- non si tiene conto della velocità finita della propagazione del suono
- il cronometro può anticipare o ritardare

Le prime due cause conducono a misure di tempo superiori a quelle che si otterrebbero se la (1) descrivesse correttamente il fenomeno; la terza produrrebbe risultati maggiori o minori di quelli corretti a seconda della disfunzione dello strumento. Queste cause appartengono però a una categoria diversa da quella degli errori casuali: l'entità e il verso della variazione rimangono inalterati fra una misura e la successiva; si parla in questo caso di **errori sistematici**.

Contrariamente agli errori casuali, quelli sistematici possono, almeno in linea teorica, essere eliminati cambiando la strumentazione e/o il metodo di misura se questo altera i risultati delle misure o apportando correzioni numeriche al risultato ottenuto. Purtroppo non sono di facile individuazione proprio perché non si evidenziano ripetendo la misurazione nelle stesse condizioni. In questo caso per rivelarne la presenza occorre o studiare più a fondo il fenomeno per averne un modello e quindi una rappresentazione matematica più accurata, oppure si deve ripetere la

---

[7] Nel campo della teoria della misura la parola "errore" non ha una connotazione negativa non essendo sinonimo, ad esempio, di "sbaglio".

[8] Il più noto consiste nel calcolare la media aritmetica della serie di risultati: i valori in eccesso tenderanno a compensarsi con quelli in difetto riducendo l'effetto degli errori casuali. Nel seguito del corso approfondiremo questa metodologia

[9] In questo caso variano anche la definizione del misurando, il metodo di misurazione e la procedura della misurazione

misurazione in condizioni diverse, p.es. cambiando lo sperimentatore o la strumentazione o il principio fisico sul quale si basa la misura, etc.

Non si deve pensare che la distinzione fra errori casuali ed errori sistematici sia così netta. Ad esempio nell'azionare il cronometro in corrispondenza del verificarsi di un qualche evento, a causa della lentezza dei nostri riflessi, l'azione avverrà sempre in ritardo (errore sistematico) ma varierà anche leggermente da una prova alla successiva (errore casuale).

Data l'impossibilità di conoscere i valori veri (occorrerebbe effettuare delle misure senza errore ...) il concetto di errore è qualitativo; nell'elaborazione dei risultati di misurazioni si ricorrerà alle incertezze, quantità statistiche descrivibili in modo oggettivo.

# Definizioni

Il *Comité International des Poids et Mesures* (**CIPM**), la più alta autorità mondiale in metrologia ha chiesto al *Bureau International des Poids et Mesures* (**BIPM**) di produrre una procedura accettata a livello internazionale per esprimere l'incertezza delle misure [10].

Tale compito è stato istruito dall'*International Organization for Standardization* (**ISO**) che meglio rappresenta le necessità delle industrie e del commercio e dalle organizzazioni che partecipano ai lavori dell'ISO: l'*International Electrotechnical Commission* (**IEC**) partner dell'ISO nella standardizzazione mondiale; il CIPM e l'*Organisation Internationale de Metrologie Légale* (**OIML**) organizzazioni mondiali nella metrologia; l'*International Union of Pure and Applied Chemistry* (**IUPAC**), l'*International Union of Pure and Applied Physics* (**IUPAP**) e l'*International Federation of Clinical Chemistry* (**IFCC**).

Seguono alcune note e definizioni, ricavate in gran parte dalle norme DIN, che sono state adattate ai contenuti del corso.

### Misurazione e misura

Misurazione:
insieme di operazioni che portano alla determinazione del valore del **misurando**, cioè il valore della grandezza fisica da misurare. Una misurazione inizia quindi con la specificazione appropriata del misurando, del **metodo di misurazione** e della **procedura di misurazione**.

Misura:
valore del misurando ottenuto in seguito a una misurazione. Essa è espressa come una unità di misura moltiplicata per un numero:
p.es. : lunghezza di una sbarra: 5,34 m; massa di un corpo: 0,152 kg; quantità di sostanza di un campione di acqua: 0,012 mol
I valori possono essere positivi, negativi o zero.
I valori di grandezze di dimensione 1 sono generalmente espressi come numeri puri (p.es. un'eccezione: 0,17 sr).
**L'unità di misura deve essere sempre espressa in quanto parte integrante della misura.**

[10] Cosí come l'uso dell'*International System of Units* (**SI**) ha portato alla coerenza in tutte le misurazioni tecniche e scientifiche, in quest'epoca di mercato globale occorre un consenso mondiale sulla valutazione ed espressione dell'incertezza affinché sia possibile confrontare misure effettuate in nazioni diverse.

Definizione del misurando:
il misurando deve essere definito con sufficiente completezza, rispetto all'accuratezza richiesta, affinché per tutti gli scopi pratici il valore associato con la sua misurazione sia unico.
Se, come esempio, la lunghezza di una sbarra di acciaio lunga nominalmente 1 m deve essere determinata con l'accuratezza di 1 µm, occorre che vengano specificate sia la temperatura che la pressione; se l'accuratezza richiesta è 1 mm non è necessario esprimere tali condizioni di misura.

Valore vero:
valore consistente con la definizione di una particolare grandezza data.
Questo è il valore si otterrebbe da una misurazione perfetta; pertanto i valori veri non sono determinabili.
Possono esserci più valori veri consistenti con una particolare definizione se questa non è sufficientemente dettagliata rispetto all'accuratezza della misurazione.

Metodo di misurazione:
può essere diretto se il valore del misurando è ottenuto mediante l'uso di uno strumento atto alla misurazione della grandezza fisica del misurando; è indiretto se il risultato è espresso in termini dei valori di altre grandezze essendo nota la relazione fra queste e il misurando.
Molti fenomeni fisici possono essere utilizzati in una misurazione; p.es. per misurare lunghezze si possono utilizzare: interferenza luminosa, variazione di capacità elettrica; per temperature: la dilatazione termica, l'effetto termoelettrico, la variazione di resistenza elettrica; per la forza: la deformazione elastica, l'accelerazione; per l'intensità di corrente: l'effetto Joule, effetti elettromagnetici.

Risultato di una misurazione:
valore attribuito al misurando in seguito a una misurazione. Esso è solo un'approssimazione o stima del valore del misurando ed è quindi completo solo quando venga accompagnato dall'incertezza di quella stima.
Riportando il risultato di una misurazione deve essere chiaro se è stata o meno effettuata una correzione per errori sistematici e se è stata eseguita una media aritmetica di più valori.
In molti casi il risultato di una misurazione è determinato da una serie di osservazioni ottenute in condizioni di ripetibilità. Eventuali variazioni dei risultati di osservazioni ripetute vengono attribuite al fatto che sono variate le grandezze influenti.

## Errori, effetti e correzioni[(11)]

Errori di misura e loro cause:
L'errore è il risultato di una misurazione meno un valore vero del misurando. Esso è un concetto idealizzato perché gli errori non possono essere conosciuti esattamente in quanto non sono noti i valori veri; in pratica si usa al suo posto un valore convenzionale che è la stima dell'incertezza.
Ogni valore misurato è influenzato da imperfezioni dello strumento, del metodo di misura, dell'oggetto cui appartiene il misurando, dell'ambiente e dell'osservatore; queste influenze possono anche variare nel tempo. Infine ci possono essere sbagli commessi dall'osservatore inesperto che si supporranno inesistenti (ma gli studenti sono per definizione degli inesperti in questo campo a meno che non abbiano precedentemente acquisito esperienza nel campo delle misurazioni).

---

[11] Il concetto di incertezza come attributo quantificabile è stato introdotto recentemente anche se la teoria degli errori è stata a lungo parte della teoria e pratica della misura. Oggi è accettato il fatto che **quando tutte le componenti note o sospette dell'errore siano state valutate e corrette, rimanga sempre un'incertezza circa la correttezza del risultato ottenuto.**

Esistono molte cause possibili dell'errore di una misurazione:
- definizione incompleta del misurando
- realizzazione imperfetta della definizione del misurando
- insieme di dati misurati non rappresentativo del misurando
- conoscenza inadeguata delle condizioni ambientali o dei loro effetti sulla misurazione
- valutazione soggettiva nella lettura di strumenti analogici
- risoluzione della strumentazione insufficiente
- valori inesatti delle costanti e dei parametri ottenuti da sorgenti esterne
- assunzioni ed approssimazioni utilizzate
- variazioni delle osservazioni ripetute non identificate

L'errore viene scomposto in una componente casuale e una sistematica.

Errori casuali

L'errore casuale è pari all'errore meno l'errore sistematico. Il suo valore non può essere conosciuto esattamente perché non è noto il valore vero.
Gli errori casuali provengono da impredicibili variazioni temporali e spaziali delle grandezze influenti. Sebbene non sia possibile compensare completamente gli errori causali, il loro effetto può essere ridotto aumentando il numero di osservazioni e calcolando la media aritmetica di un numero sufficientemente elevato di misure: l'errore casuale è il risultato di una misurazione meno la media che si potrebbe ottenere da un numero infinito di misurazione del misurando sotto condizioni di ripetibilità.
**La deviazione standard sperimentale della media aritmetica di una serie di misurazioni non è l'errore casuale della media ma una misura dell'incertezza della media dovuta ad effetti casuali.**

Errori sistematici

L'errore sistematico è pari all'errore meno l'errore casuale. Il suo valore non può essere conosciuto esattamente perché non è noto il valore vero.
Gli errori sistematici producono variazioni di verso e entità costanti al ripetersi delle misurazioni; non possono essere eliminati ma spesso possono essere ridotti: se viene identificato un effetto sistematico esso può essere quantificato e, se esso è significativo per l'accuratezza richiesta, si può applicare una correzione numerica per compensarne l'effetto o procedere con un nuova misurazione in condizioni di non riproducibilità.
L'errore sistematico è la media che si potrebbe ottenere da un numero infinito di misurazioni del misurando sotto condizioni di ripetibilità meno il valore vero del misurando. L'errore sistematico può essere evidenziato se non si osservano condizioni di riproducibilità.
**Si assume che il risultato di una misurazione sia stato corretto per tutti gli effetti sistematici significativi noti e che sia stato compiuto ogni sforzo per identificarli e che, dopo la correzione, il valore atteso dell'effetto sistematico corretto sia nullo.**
**Dopo la correzione degli effetti sistematici, il risultato di una misurazione è tuttavia solo una stima del valore del misurando.**

Correzione/fattore correttivo

valore che va sommato algebricamente/moltiplicato per il risultato per compensare l'errore sistematico; la compensazione non può essere completa in quanto non è noto l'errore.

Condizioni di ripetibilità:

esistono quando lo stesso osservatore effettua misure della stessa grandezza fisica usando lo stesso metodo di misura e gli stessi strumenti nelle stesse condizioni ed in un breve intervallo di tempo.
Le variazioni di osservazioni ripetute vengono attribuite al fatto che sono variate grandezze influenti.

Grandezza influente:
grandezza diversa dal misurando che influisce sul risultato di una misurazione; p.es.: la temperatura di un micrometro o la frequenza di una tensione alternata.

Condizioni di riproducibilità:
possono esistere quando diversi osservatori eseguono misure di una stessa grandezza fisica (opportunamente definita) utilizzando lo stesso metodo di misura ma strumenti diversi e in luoghi e tempi diversi. Il confronto dei risultati ottenuti sotto condizione di riproducibilità può evidenziare la presenza di effetti sistematici non determinabili da ciascun osservatore separatamente.

## Incertezza

**Riportando il risultato di una misura è obbligatorio fornire qualche indicazione quantitativa della qualità del risultato affinché i suoi utilizzatori possano stabilirne l'affidabilità.**
**Senza tale indicazione i risultati delle misure non possono essere confrontati né fra di loro né con valori di riferimento.**
Errore ed incertezza non sono sinonimi ma due concetti diversi: il primo è qualitativo perché si basa sul valore vero che non è noto; il secondo è quantitativo perché si basa sui valori dei risultati delle misurazioni.
Quando tutte le componenti note o sospette dell'errore siano state valutate e corrette, rimane sempre un'incertezza circa la correttezza del risultato ottenuto.
L'incertezza comprende in generale diverse componenti; alcune possono essere valutate statisticamente (incertezze di tipo A); altre vengono valutate assumendo distribuzioni di probabilità assunte sulla base dell'esperienza o di altre informazioni (incertezze di tipo B).
Le componenti della categoria A) sono caratterizzate dalle stime delle varianze $\sigma^2$ o delle deviazioni standard $\sigma$ e dal numero di gradi di libertà $\nu$.
Le componenti della categoria B) devono essere caratterizzate da quantità che possono essere considerate approssimazioni delle corrispondenti varianze (la cui esistenza è assunta); analogamente per le approssimazioni delle deviazioni standard.
L'incertezza viene generalmente espressa dal parametro statistico deviazione standard (o un suo multiplo).
L'incertezza standard del risultato di una misurazione derivata ottenuto dai valori di altre grandezze è detta **incertezza standard combinata**. La corrispondente deviazione standard stimata è pari alla radice quadrata della varianza combinata ottenuta dalle varianze delle varie componenti (legge di propagazione delle incertezze).

## Una scienza è esatta nel limite in cui riesce a determinare l'incertezza dei suoi risultati

# Elaborazione di dati sperimentali

## Cifre significative

I metodi di misura, gli strumenti e l'osservatore possono essere classificati in base a:

**sensibilità**: capacità di apprezzare piccole variazioni delle grandezze in esame

**precisione**: capacità di produrre lo stesso risultato ripetendo più volte la stessa osservazione (errori casuali trascurabili)

**accuratezza**: capacità di produrre un risultato esente da errori sistematici

Quanto più una misura è spinta (è necessario determinare i particolari) (**sensibilità**)
tanto meglio (piccoli errori casuali) si dovrà osservare il fenomeno (**precisione**)
e tanto più si dovrà porre attenzione agli errori sistematici (**accuratezza**)
Di conseguenza il valore numerico della misura andrà riportato con un maggior numero di cifre (**cifre significative**)
Più sono le cifre significative, migliore deve essere la qualità della misura che implica quindi un maggior *costo*: acquisto(€), manutenzione, strumentazione, personale, tempo, facilità d'uso, ...

**Il numero di cifre significative del risultato di una misura è quindi strettamente correlato alla bontà della misura e non può essere scelto arbitrariamente.**

Per ottenere il numero di cifre significative occorre togliere l'eventuale virgola al numero e contare tutte le cifre a partire dalla prima a sinistra non nulla

| numero | cifre | cifre decimali | cifre significative |
|---|---|---|---|
| 12 300 | 5 | 0 | 5 |
| 1 230,0 x 10 | 5 | 1 | 5 |
| 123,0 x $10^2$ | 4 | 1 | 4 |
| 1,23 x $10^4$ | 3 | 2 | 3 |
| 0,123 0 x $10^5$ | 5 | 4 | 4 |

I valori numerici del risultato di una misura e della sua incertezza non devono essere riportati con un numero eccessivo di cifre significative.
Usualmente l'incertezza viene riportata con due cifre significative.
I valori dei risultati devono essere arrotondati opportunamente per essere consistenti con le incertezze: ad esempio se $R = 10{,}057\ 62\ \Omega$ con $\sigma = 27\ \text{m}\ \Omega$
allora sarà $R = (10{,}058 \pm 0{,}027)\ \Omega$.

Se un numero ha più cifre significative di quante ne occorrano, il numero va arrotondato (approssimando all'unità superiore se l'ultima cifra è 5 o superiore)

0,445 945 0,445 95 0,445 9 0,446 0,45 0,4
0,445 95
0,446 0
0,446 <--- arrotondamenti successivi: differiscono al più
0,45 per la meno significativa delle cifre dai valori
0,5 ottenuti direttamente

Per alcune applicazioni è sufficiente rappresentare l'incertezza mediante il numero di cifre significative del risultato; in tal caso il risultato deve essere riportato con un numero di cifre significative tale per cui l'incertezza corrisponda all'ultima di esse:

$m = (100{,}021\ 47 \pm 0{,}000\ 35\ )\ \text{g}$ -> $m = 100{,}021\ 5\ \text{g}$
$R = (10{,}058 \pm 0{,}027)\ \Omega$ -> $R = 10{,}06\ \Omega$

Eseguendo delle operazione fra risultati di misure, la considerazione da ricordare è che aggiungere ad una cifra incerta un'altra cifra non aumenta la quantità di informazione. Pertanto:

1) **il valore di una misura diretta deve avere tante cifre significative quante sono quelle ottenute all'aver eseguito la lettura di uno strumento analogico al decimo di divisione o al digit nel caso di uno strumento digitale**;

2) nelle quantità ottenute dalle operazioni di somma o differenza di misure il risultato deve avere tante cifre decimali quante ne ha la misura col minor numero:
5,94 +
789,1 +
15,426 =
810,466 =>
=> 810,5

3) nelle quantità ottenute come prodotto o rapporto di misure il risultato deve avere tante cifre significative quante ne ha la misura col minor numero:
2,43 x
6,9 =
16,767 che è arrotondato a 17 in modo tale che il risultato abbia due cifre significative come 6,9.

**ESERCIZI**

- **1)** Riportare con due cifre significative i valori:

  $\pi$ e $\sqrt{2}$ $\bar{g}$ 0,432 324,43 $3\mathrm{x}10^7$

- **2)** Riportare con due cifre significative i valori pari al:

  2,3% di 342,4 26% di 0,421 0,13% di $723\mathrm{x}10^4$

- **3)** Calcolare la media, la deviazione standard e la deviazione standard della media delle misure:

  **I(mA) 124 136 142 117 140 138 125**

  I=131,714 29 mA $\sigma_s(I) = 9{,}604\ 0$ mA $\sigma_s(\bar{I}) = 3{,}629\ 97$ mA

A) Riportare la <u>deviazione standard</u> della media con due cifre <u>significative</u>

$\sigma_s(\bar{I}) = 3{,}6$ mA

B) Arrotondare la <u>media</u> in modo da avere lo stesso numero di cifre <u>decimali</u> della deviazione standard $\bar{I} = 131{,}7$ mA

Per riportare correttamente il risultato di una serie di misure utilizzare le regole A) e B) dell'esempio ed utilizzare la notazione:

**I = (131,7±3,6)mA**

# INCERTEZZE

## Incertezze di tipo A

Sono quelle ottenute a partire dalla deviazioni standard sperimentale della media aritmetica:

$$\sigma_s(\overline{X}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,N}(x_i - \overline{X})^2}{N(N-1)}}$$

## Incertezze di tipo B

**non** sono ottenute come deviazione standard sperimentali della media aritmetica.

Se viene eseguita una sola misurazione l'incertezza deve essere ricavata dalla conoscenza delle caratteristiche degli strumenti utilizzati o da risultati precedenti ottenuti nelle stesse condizioni.
Per esempio, spesso non c'è una conoscenza specifica della distribuzione di X all'interno di un certo intervallo e si può solo assumere che essa sia costante all'interno dell'intervallo e nulla all'esterno (distribuzione uniforme) ottenendo una deviazione standard è pari a $1/\sqrt{12}$ volte la larghezza dell'intervallo (p. es.: 0,29 volte la divisione sulla scala dello strumento o l'intervallo definito da una tolleranza)

# MISURE INDIRETTE

spesso un misurando Y non è misurato direttamente ma è determinato da altre M grandezze (misurate direttamente) $X_1, X_2, ..., X_M$ attraverso la relazione:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_M) \qquad (1)$$

Una stima y di Y è data da

$$Y \approx y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_M) \text{ con } \overline{X}_i = \frac{\sum_{k=1,N} X_{ik}}{N}$$

dove il k-mo[12] valore di $X_i$ viene indicato con $X_{ik}$.

Questa stima è corretta solo se la funzione è lineare; altrimenti costituisce un'approssimazione valida al primo ordine di uno sviluppo in serie di Taylor della funzione.

## Propagazione delle incertezze assolute

La deviazione standard sperimentale del risultato di una misurazione ottenuto dai valori di altre grandezze fra loro indipendenti[13] è detta incertezza standard combinata; essa è:

$$\boxed{\sigma(y) \approx \sigma_s(y) = \sqrt{\sum_{i=1,M}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2\Bigg|_{X_i=\overline{X}_i} \sigma_s^2(\overline{X}_i)}} \qquad (2)$$

[12] Ovviamente se della grandezza $X_i$ viene eseguita una sola misura, nell'espressione di y comparirà $X_i$

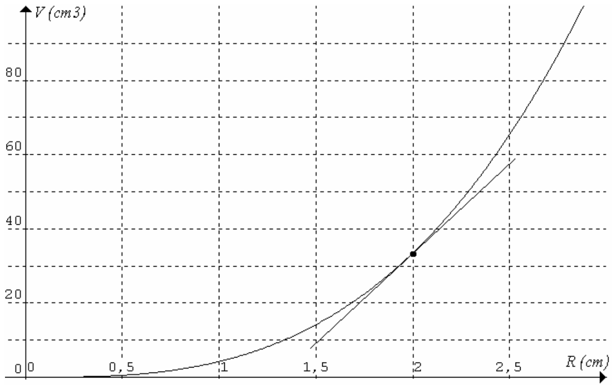
[13] Se le grandezze sono correlate l'espressione più appropriata per la varianza combinata richiede l'uso delle covarianze. Nelle esperienze svolte durante il corso il grado di correlazione sarà in generale trascurabile e quindi riterremo la (2) sufficientemente accurata per i nostri scopi.

dove f è la funzione dell'equazione (1); le derivate[14] sono calcolate nei valori medi $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_M$ e le $\sigma^2_s(\overline{X}_i)$ sono assunte come le rispettive incertezze di tipo A[15].

L'equazione (2) è basata sulla sviluppo in serie di Taylor al primo ordine (legge di propagazione delle incertezze assolute).

Qualora la non linearità di f nell'intorno dei valori medi $\overline{X}_i$ sia significativa, all'equazione (2) vanno sommati termini di ordine più elevato.

Questa stima è esatta solo se la funzione è lineare; altrimenti costituisce una approssimazione al primo ordine dello sviluppo in serie di Taylor




**ESEMPIO:** $V = 4/3\ \pi\ R^3$

$$\sigma_s(V) = 4\pi R^2 \sigma_s(R)$$

## Propagazione delle incertezze relative:

se Y è un monomio: $\boxed{Y = c\, X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_M^{p_M}}$ l'incertezza standard combinata può essere ottenuta più rapidamente a partire dall'incertezza relativa[16]:

$$\boxed{\frac{\sigma_s(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1,M} p_i^2 \left(\frac{\sigma_s(\overline{X}_i)}{\overline{X}_i}\right)^2}} \qquad (3)$$

**VALIDA SOLO PER MONOMI**

## ESEMPI

- 1) Misurare la grandezza derivata "densità di una sfera": $\rho = \dfrac{m}{\frac{4\pi}{3} r^3}$ (a)

Supponiamo di aver misurato la massa m ( $m = \overline{m} \pm \sigma_s(\overline{m})$ ) e il raggio r ( $r = \overline{r} \pm \sigma_s(\overline{r})$ ).

---

[14] Le derivate parziali $\partial f / \partial x_i$ andrebbero calcolate, in linea di principio, nei valori attesi delle $X_i$; in realtà vengono calcolate nei loro valori stimati $\overline{X}_i$. Queste derivate sono dette coefficienti di sensibilità perché descrivono di quanto varia la grandezza y al variare delle $X_i$. La varianza combinata $\sigma^2(y)$ viene quindi vista come somma di termini ognuno dei quali rappresenta la stima della varianza di y dovuta alla variazione di $X_i$.
I coefficienti di sensibilità sono a volte ricavati sperimentalmente misurando la variazione di Y al variare di una particolare $X_i$ mentre le altre grandezze X restano costanti.

[15] Anche in questo caso, se la grandezza $X_i$ viene misurata una sola volta, nell'espressione dell'incertezza combinata comparirà quella misura (non c'è una media aritmetica) e al posto dell'incertezza di tipo A comparirà necessariamente quella di tipo B

[16] Può essere un esercizio assai utile provare a sostituire nella (2) l'espressione del monomio: otterrete la (3)

Dalla (2) si ha: $$\sigma(\rho)=\sqrt{\left(\frac{1}{\frac{4\pi}{3}\bar{r}^3}\right)^2\sigma_s^2(\bar{m})+\left(-3\frac{\bar{m}}{\frac{4\pi}{3}\bar{r}^4}\right)^2\sigma_s^2(\bar{r})} \qquad \text{(b)}$$

In questo caso però è possibile, e quindi preferibile, applicare la (3) che è di uso più immediato (non richiede calcoli di derivate): $$\frac{\sigma(\rho)}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_s(\bar{m})}{\bar{m}}\right)^2+(-3)^2\left(\frac{\sigma_s(\bar{r})}{\bar{r}}\right)^2} \qquad \text{(c)}$$

da cui si ottiene: $$\sigma(\rho)=\rho\sqrt{\left(\frac{\sigma_s(\bar{m})}{\bar{m}}\right)^2+9\left(\frac{\sigma_s(\bar{r})}{\bar{r}}\right)^2} \qquad \text{(d)}$$

Va notato che matematicamente le due formule (b) e (d) sono coincidenti: entrambe derivano dalla linearizzazione della (a) mediante sviluppo in serie di Taylor nell'intorno del punto $(\bar{m},\bar{r})$ [17]

• 2) Misurare la densità di un cilindro di massa M, altezza h e diametro d a partire dai dati:

M = 13,2 12,4 14,0 12,8 14,6 13,5 g

h = 10,02 cm (una sola misura con strumento analogico)

d: in misure precedenti si era ottenuto 8,500 mm mediante calibro (50μm/div)

**M**: dai dati si ricava $\sum_{i=1,6} m_i = 80{,}5\,g$ e quindi $\bar{M}=\frac{\sum_{i=1,6} m_i}{6}=13{,}427\,g$ ; inoltre

$\sum_{i=1,6} m_i^2 = 1083{,}25\,g^2$ e quindi $\sigma_M=\sqrt{\frac{\sum_{i=1,6} m_i^2-6\cdot\bar{M}^2}{5}}=0{,}801\,g$ da cui $\sigma_{\bar{M}}=\frac{\sigma_M}{\sqrt{6}}=0{,}326\,g$

Pertanto $M=(13{,}43\pm 0{,}33)\times 10^{-3}\,kg$

**h**: l'unica misura è riportata al decimo di mm; quindi la divisione dello strumento è il mm;
$\sigma_B$= 1mm/√12 = 0,29 mm Pertanto $h=(100{,}20\pm 0{,}29)\times 10^{-3}\,m$

**d**: $\sigma_B$= 50μm/√12 = 14,43 μm Pertanto $d=(8{,}500\pm 0{,}014)\times 10^{-3}\,m$

e quindi $$\rho=\frac{\bar{M}}{\frac{\pi}{4}\bar{d}^2\bar{h}}\pm\sqrt{\left(+\frac{1}{\frac{\pi}{4}\bar{d}^2\bar{h}}\right)^2\sigma_{\bar{M}}^2+\left(-2\frac{\bar{M}}{\frac{\pi}{4}\bar{d}^3\bar{h}}\right)^2\sigma_{\bar{d}}^2+\left(-\frac{\bar{M}}{\frac{\pi}{4}\bar{d}^2\bar{h}^2}\right)^2\sigma_{\bar{h}}^2}$$

$$\rho=2\,362\pm\sqrt{(175\,875)^2(0{,}33\times 10^{-3})^2+(-555\,766)^2(0{,}014\times 10^{-3})^2+(-23\,573)^2(0{,}29\times 10^{-3})^2}=$$
$$=2\,362\pm\sqrt{(58{,}039)^2+(7{,}781)^2+(6{,}836)^2}=(2\,362\pm 59)\ kg/m^3$$

Alternativamente, poiché la relazione $\rho=\frac{M}{\frac{\pi}{4}d^2h}$ è un monomio, usando le incertezze relative:

[17] Anche se ρ varia col cubo di r, nell'intorno di $\bar{r}$ la funzione è linearizzabile: è sufficiente considerare valori di r che si discostino di poco da $\bar{r}$ : $\frac{r-\bar{r}}{\bar{r}}<<1$ . Nel nostro caso questo implica $\frac{\sigma(\bar{r})}{\bar{r}}<<1$ , relazione generalmente verificata in tutte le misure.

$$M = (13{,}43 \pm 0{,}33)\times 10^{-3}\,\mathrm{kg} \rightarrow \frac{\sigma_M}{M} = \frac{0{,}33\times 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{13{,}43\times 10^{-3}\,\mathrm{kg}} = 0{,}02457 = 2{,}5\%$$

$$d = (8{,}500 \pm 0{,}014)\times 10^{-3}\,\mathrm{m} \rightarrow \frac{\sigma_d}{d} = \frac{0{,}014\times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{8{,}5\times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 0{,}0016471 = 0{,}16\%$$

$$h = (100{,}20 \pm 0{,}29)\times 10^{-3}\,\mathrm{m} \rightarrow \frac{\sigma_h}{h} = \frac{0{,}29\times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{100{,}2\times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 0{,}0028942 = 0{,}29\%$$

e quindi: $\rho = \dfrac{\overline{M}}{\frac{\pi}{4}\overline{d}^2\overline{h}} = 2362\ \mathrm{kg/m^3}$ con $\sigma_\rho = \left(\dfrac{\sigma_\rho}{\rho}\right)\rho = \sqrt{(+1)^2\left(\dfrac{\sigma_M}{M}\right)^2 + (-2)^2\left(\dfrac{\sigma_d}{d}\right)^2 + (-1)^2\left(\dfrac{\sigma_h}{h}\right)^2}\ \rho$

pertanto: $\rho = 2\,362\left(1 \pm \sqrt{(0{,}025)^2 + 4(0{,}0029)^2 + (0{,}0016)^2}\right) = 2\,362(1 \pm 0{,}02571) = (2362 \pm 61)\ \mathrm{kg/m^3}$

| |
|---|
| Convenzionalmente l'incertezza relativa si riporta con due cifre significative.<br>Ad esempio : $\sigma_T/T = 1{,}26 / 34{,}713 = 0{,}0363 = 3{,}6\%$ |

- 3) Date le misure L1 = (20,42 ± 0,26) cm
  L2 = (10,11 ± 0,43) cm

1) <u>misurare la lunghezza **Ls = L1 + L2**</u>

Ls = 30,53 cm ± $\sigma_s$(Ls)

$$\sigma_s(Ls) = \sqrt{\left(\frac{\partial\, Ls}{\partial L1}\right)^2 \sigma_s^2(L1) + \left(\frac{\partial\, Ls}{\partial L2}\right)^2 \sigma_s^2(L2)} = \sqrt{(+1)^2\sigma_s^2(L1) + (+1)^2\sigma_s^2(L2)} = \sqrt{0{,}26^2 + 0{,}43^2} = 0{,}502\,5\ \mathrm{cm}$$

Ls = (30,53 ± 0,50) cm (1,6%)

2) <u>misurare la lunghezza **Ld = L1 - L2**</u>

Ld = 10,31 cm ± $\sigma_s$(Ld)

$$\sigma_s(Ld) = \sqrt{\left(\frac{\partial\, Ld}{\partial L1}\right)^2 \sigma_s^2(L1) + \left(\frac{\partial\, Ld}{\partial L2}\right)^2 \sigma_s^2(L2)} = \sqrt{(+1)^2\sigma_s^2(L1) + (-1)^2\sigma_s^2(L2)} = \sqrt{0{,}26^2 + 0{,}43^2} = 0{,}502\,5\ \mathrm{cm}$$

Ld = (10,51 ± 0,50) cm (4,8%)

3) <u>misurare l'area **A = L1 x L2**</u>

A = 206,4462 cm$^2$ ± $\sigma_s$(A)

$$\sigma_s(A) = \sqrt{\left(\frac{\partial\, A}{\partial L1}\right)^2 \sigma_s^2(L1) + \left(\frac{\partial\, A}{\partial L2}\right)^2 \sigma_s^2(L2)} = \sqrt{(L2)^2\sigma_s^2(L1) + (L1)^2\sigma_s^2(L2)} = \sqrt{10{,}11^2 0{,}26^2 + 20{,}42^2 0{,}43^2} = 9{,}166\ \mathrm{cm^2}$$

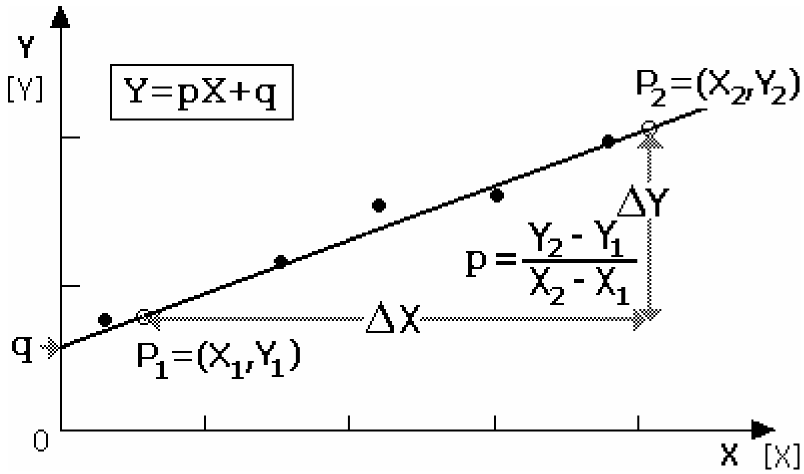
A = (206,4 ± 9,2) cm$^2$ (4,6%)

# Studio della dipendenza funzionale di due grandezze fisiche

Supponiamo di voler studiare un sistema fisico ma di conoscerlo già a un livello tale da poter prevedere che se viene sottoposto alla sollecitazione X esso produrrà una risposta Y secondo la legge $\boxed{Y = \mathbf{p}\,X + \mathbf{q}}$ dove **p** e **q** sono due parametri incogniti, scopo della nostra misura(18).
Per ogni valore $X_i$ della sollecitazione X (con i = 1, N valori diversi) eseguiamo una misura $Y_i$ della grandezza Y.

Riportiamo su un grafico gli N punti che corrispondono alle coppie di misure.
Successivamente tracciamo la retta che meglio approssima i punti (minimizza le distanze dei punti della retta).
Poiché gli N punti su questo grafico rappresentano delle misure (quindi affette da errori) la retta (funzione analitica) non passa per tutti i punti sperimentali neanche se la nostra schematizzazione della legge fisica è corretta.
Dopo qualche tentativo si è però in grado di tracciare una retta che non si discosta per più di qualche percento da quella ottenibile mediante metodi statistici (retta dei minimi quadrati o di regressione).

Vediamo come si presenterebbe un grafico delle misure avendo tracciato la retta: **Y = p X + q** della quale per il momento ancora non conosciamo i valori di **p** e **q**(19)




A questo punto non resta che determinare il valore della pendenza(20) **p** e dell'intercetta **q**.

---

18 Spesso lo studio di un sistema più o meno complesso si riduce alla determinazione della sua risposta a sollecitazioni note. Si ricorre però a questo metodo anche quando una sola coppia di misure sarebbe in grado di fornire la risposta cercata. Il fatto è che lo studio della risposta a sollecitazioni diverse consente di evidenziare la presenza sia di errori sistematici e casuali nelle misure che anomalie nel comportamento del sistema in esame.
19 Da questo momento in poi va dimenticata l'esistenza dei singoli punti: la migliore rappresentazione del fenomeno studiato è la retta che è stata tracciata
20 Analiticamente si parla di coseni direttori o di coefficienti angolari ma in questo caso c'è da notare che sugli assi sono riportate unità di misura in generale diverse e addirittura di grandezze fisiche diverse. L'angolo che si potrebbe misurare con un goniometro cambierebbe se lo stesso grafico venisse ripetuto con scale diverse: tale angolo non ha nessuna relazione col significato fisico del parametro p. Per evitare confusione si preferisce parlare di pendenza (con dimensioni fisiche pari a quelle di Y/X).

Per la pendenza **p** si prendono due punti sulla retta quanto più distanti possibile al fine di minimizzare l'effetto degli errori di lettura delle coordinate dal grafico.

Evidenziate, ad esempio cerchiandoli, i due punti e riportate i valori delle coordinate $[x_1, y_1]$ e $[x_2, y_2]$ (con le unità di misura!) al fine di calcolare la pendenza come rapporto(21) fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse: $\mathbf{p} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

L'intercetta **q** si legge direttamente dal grafico: **q = Y(X=0)**.

## Tabelle

Il modo più razionale di riportare molti dati è in forma di tabella perché permette confronti per colonne e/o righe, controlli di coerenza, di tendenze, etc.

Alcune raccomandazioni (!!!):

- non dimenticare di **esprimere per ogni misura l'unità e riportare il corretto numero di cifre significative**;
- indicazioni ausiliarie comuni a tutti i dati di una colonna (p. es . $10^n$ o unità ) vanno riportate sull'intestazione: non devono ingombrare la tabella;
- evitare colonne di dati uguali; ricordarne l'esistenza in legenda;
- conviene impostare tabelle in forma aperta (possibilità di aggiungere colonne/righe).

## Disegno di un grafico

- tutti i dati graficati devono essere presenti in una tabella;
- evidenziare eventuali dati non graficati motivandone l'esclusione;
- le scale sugli assi devono essere scelte in modo da **garantire la leggibilità delle coordinate di un qualsiasi punto** posto sul grafico (anche diverso dai punti risultati di misure);
- utilizzare il foglio di carta millimetrata a disposizione (**non è indispensabile che il grafico si estenda a tutto il foglio** ma deve risultare leggibile)
- usare solo scale multiple di 1, 2, 5 millimetri (evitare, se possibile, 4; MAI 3, 7, 9 o valori che richiedano una calcolatrice)
- se non viene richiesto dall'elaborazione grafica, non è necessario che le scale inizino dall'origine
- ogni asse deve riportare il simbolo della grandezza, l'unità di misura, l'eventuale fattore $10^n$
- su ogni asse vanno riportate a intervalli regolari poche (5-10) tacche con l'indicazione del valore
- per non rendere difficoltosa ogni successiva elaborazione non riportare mai sugli assi i valori sperimentali delle misure effettive o collegare i punti tra loro o con gli assi
- è utile(22) riportare sul grafico la relazione (titolo del grafico) che ci si attende occorrere fra le quantità riportate sugli assi

---

21 La dimostrazione è banale …

22 si tratta di un eufemismo: è obbligatorio (all'interno di questo corso, per fini didattici)

# STRUMENTI DI MISURA

## Scala degli strumenti analogici

Gli strumenti di misura analogici possono avere due o più scale.
- Indice: parte mobile di un dispositivo indicatore la cui posizione, rispetto a tacche di riferimento, permette di determinare il valore indicato (p.es.: ago, punto luminoso, superficie di un liquido).
- Scala: insieme ordinato di tacche (con una numerazione associata) che forma parte del dispositivo indicatore di uno strumento di misura.
- Divisione: parte della scala compresa fra due tacche consecutive.
- Valore di una divisione: distanza fra due tacche misurata nelle unità riportate sulla scala.
- Scala lineare/non lineare: scala in cui il rapporto fra la lunghezza (p.es. in cm) e il valore di ciascuna divisione è/non è costante per tutta la scala. Una scala non lineare può essere ad esempio: logaritmica, quadratica, parabolica, iperbolica (ohmmetro).
- Scala a zero soppresso: scala in cui l'intervallo ricoperto dalla scala non include lo zero (p.es.: il termometro clinico).
- Scala a zero centrale: scala in grado di presentare valori sia positivi che negativi

## Sensibilità

Una delle principali caratteristiche distintive di uno strumento di misura è la sua **sensibilità**.
Essa è definita come rapporto fra la variazione dell'indicazione e la variazione della sollecitazione in ingresso che l’ha provocata. Se invece lo strumento di misura ha un indicatore digitale la sensibilità è definita come il rapporto fra il numero di incrementi digitali e la variazione del misurando che l'ha provocata (dove la variazione minima è detta digit).
Al variare della sollecitazione la sensibilità può essere costante, se la funzione di trasferimento è lineare (p.es. voltmetro, oscilloscopio), o variare in funzione della sollecitazione (p.es. : ohmmetro).
Più lo strumento è sensibile e più piccola è la variazione della grandezza di ingresso che produce una variazione dell’uscita pari a una divisione della scala.

## Precisione

La capacità di uno strumento di fornire indicazioni similari sotto condizioni di ripetibilità della misurazione della stessa grandezza è detta precisione.
In generale l'indicazione di uno strumento è funzione non solo della grandezza da misurare ma anche di altre quantità (disturbi) che influenzano il risultato variandolo in modo impredicibile (si tratta di errori casuali). Tanto più lo strumento è esente da questi effetti tanto più è preciso.
La precisione e la sensibilità dello strumento sono due caratteristiche antitetiche: uno strumento molto sensibile riesce a percepire piccole variazioni della grandezza di ingresso ed è quindi sensibile anche alle cause di errore; uno strumento molto preciso non sarà sensibile a questi fattori casuali e quindi sarà tipicamente poco sensibile anche alle variazioni dell’ingresso.

## Accuratezza

Si definisce accuratezza di uno strumento la sua capacità di fornire una risposta prossima al valore vero del misurando. Il reciproco di questo concetto è l’inaccuratezza che cerca di quantificare la presenza di errori sistematici evidenziabile, sotto condizioni di ripetitività, dalle differenze delle medie aritmetiche di campioni di misure ottenuti mediante metodi e/o strumenti diversi.
Una volta evidenziata l’inaccuratezza di uno strumento se ne deve ridurre l’entità o tramite l’aggiustamento, operazione che altera uno strumento di misura al fine di riportarne le caratteristiche entro i valori limite previsti; p.es. l'azzeramento di un ohmmetro o di un Palmer o mediante una calibrazione, operazione che non altera uno strumento di misura e porta alla conoscenza della differenza fra i valori indicati dallo strumento e i corrispondenti valori veri.

ESERCIZIO: Discutere sensibilità, precisione e accuratezza di un orologio fermo