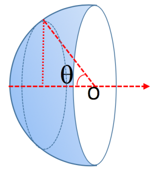
2° ESERCITAZIONE – venerdì 4 ottobre 2019 (e altri esercizi di elettrostatica)

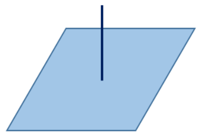
CAMPO

1) Su una semisfera di raggio R = 10 cm centrata nell'origine è distribuita uniformemente una densità di carica σ = +3,1 μC/m^2. Determinare nell'origine l'intensità del campo.
>>> soluzione: $E = \sigma/4\varepsilon_0$ = 9 kV/m



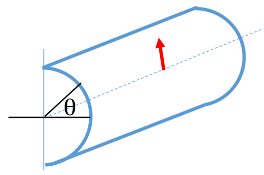
FLUSSO

2) Calcolare il valore del flusso del campo elettrico generato da una carica q = 1 nC attraverso una superficie quadrata di lato L = 42 mm. La carica è posta a distanza L/2 sull'asse passante per il centro del quadrato.
{suggerimento: considerare il cubo che si otterrebbe con 6 di questi quadrati}
>>> soluzione: 18 Vm



GAUSS

3) Su una superficie semicilindrica <u>infinitamente</u> lunga di raggio R = 1 mm è distribuita una carica positiva con densità $\sigma = \sigma_0 \sin^2\theta$. Determinare il valore del campo elettrico in un punto dell'asse della figura (σ_0 = 10 nC/m^2).
{suggerimento: suddividere la superficie in fili carichi paralleli all'asse}
>>> soluzione: E = 120 V/m

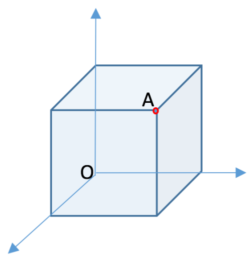


4) Atomo di idrogeno: ricavare e graficare approssimativamente l'andamento $E_r(r)$ della componente radiale del campo elettrico generato da una carica positiva puntiforme q+ = e circondata da una carica negativa di valore complessivo q- = -e distribuita uniformemente su una <u>superficie</u> sferica di raggio R = 0,05 nm centrata intorno alla carica positiva.
4a) Il modello di Thomson dell'atomo di idrogeno prevedeva che la carica positiva +e fosse uniformemente all'interno di una sfera di raggio R. Determinare il moto di un elettrone (carica –e, massa m) inizialmente fermo sulla superficie della sfera.
>>> soluzione: moto armonico $\omega^2 = e^2/(4\pi\varepsilon_0 m R^3)$
4a) calcolare **E**(r); m**a** = q**E**; $E(r<R) = 1/(4\pi\varepsilon_0)\, Q(1/r^2 - r/R^3)$

5) Una carica elettrica è distribuita all'interno di un guscio sferico di raggi a e b con densità di volume $\rho = k/r$ dipendente da r, distanza dal centro del guscio. Determinare l'intensità del campo elettrico sulle due superfici del guscio. Quale carica puntiforme Q andrebbe posta nel centro della distribuzione per avere E(a) = E(b)?
>>> soluzione: 0; $\frac{k(b^2-a^2)}{2\varepsilon_0 b^2}$; $Q = 2\pi k\, a^2$

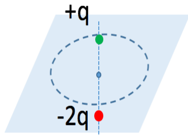
DIVERGENZA

6) Nello spazio è presente un campo elettrico $\mathbf{E} = c\, z^3\, \mathbf{k}$ con c = 10 MV/m^4. Facendo riferimento alla figura determinare la carica elettrica presente nel cubo di lato d = 5 cm.
Utilizzare la I equazione di Maxwell: div $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(r)/\varepsilon_0$ per ricavare l'espressione di $\rho(z) = 3cz^2\varepsilon_0$
>>> soluzione: Q = 28 pC



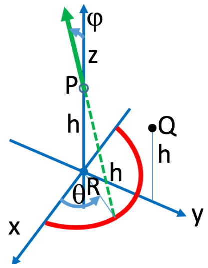
ALTRI

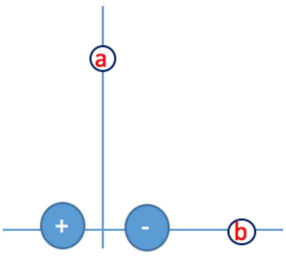
7) Due cariche q' = q = 1 nC; q" = - 2 q sono poste a distanza 2δ = <u>2 mm</u>. Determinare il valore numerico dell'intensità del campo elettrico nei punti del piano mediano a distanza d = <u>1 m</u> dal segmento congiungente le due cariche.
>>> soluzione: 9 V/m



8) Un segmento di lunghezza a = 6 cm è uniformemente carico con densità λ = +1,4 μC/m. A distanza 2d = 2 cm da una estremità è posta una carica puntiforme +Q.
Determinare il valore di Q sapendo che nel punto P a metà distanza fra l'estremità del filo e la carica Q il campo elettrico è nullo.
>>> soluzione: Q = 12 nC

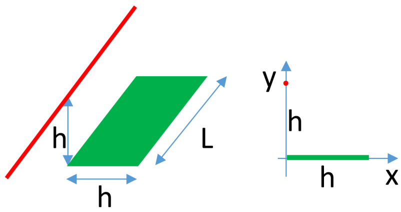
9) Un anello carico di forma semicircolare e raggio R = 3 cm, con densità di carica λ = 10 nC/m giace su un semipiano x-y come indicato in figura.
Una carica Q = -0,3 nC giace nel punto Q = {0, h, h} con h = 4 cm.
Calcolare il flusso del campo elettrico totale attraverso la superficie di un cilindro centrato nel sistema di riferimento, con asse lungo z, avente raggio R_{cil} = 2 cm e altezza H_{cil} = 10 cm.





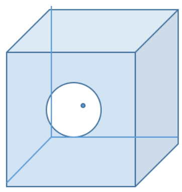
10) Date due distribuzioni rettilinee indefinite con densità di carica λ_1 = +4 μC/m e λ_2 = -4 μC/m poste parallelamente a distanza 2δ = 2 cm, determinare il campo elettrico:
a) in un punto posto a distanza d = 6 cm dal piano contenente le due cariche filiformi e situato simmetricamente rispetto ad esse
b) in un punto del piano contenente le due cariche filiformi posto a d+δ = 7 cm da λ_1 e a d-δ = 5 cm da λ_2.
>>> soluzione: a) 0,39 MV/m; b) 0,41 MV/m

11) Sul piano XZ è appoggiato un rettangolo di lati h e L sul quale è uniformemente distribuita una carica con densità σ. A distanza h dal piano è disposto, parallelamente al lato L, un lungo filo carico con densità lineare λ. Ricavare le componenti della forza che agisce sul rettangolo.



A seconda dello svolgimento potrebbero essere utili:
$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c \qquad \int \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + c \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}(x) + c$
>>> soluzione: Fx = $\lambda\sigma L/2\pi\varepsilon_0 \ \ln(\sqrt{2})$ Fy = $-\lambda\sigma L/2\pi\varepsilon_0 \ \pi/4$

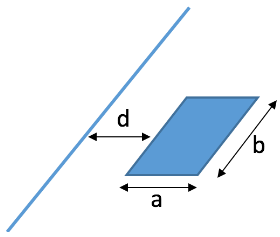
12) Il campo elettrico in un punto dell'asse di un disco di raggio R, con densità di carica uniforme σ, a distanza z dal piano del disco vale $E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$.
Utilizzare tale relazione per calcolare il valore del campo elettrico al centro di una superficie cubica di lato L con la stessa densità di carica σ e forata circolarmente (R = L/4) al centro di una delle 6 superfici.



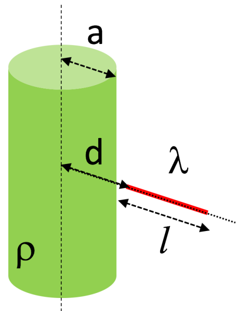
{Suggerimento: se non ci fosse il foro, data la simmetria... inoltre il campo elettrico è additivo...}
>>> soluzione: $(\sigma/2\varepsilon_0)(1-2/\sqrt{5})$

13) In un guscio sferico (raggio interno a; raggio esterno b) è distribuita una carica con densità non uniforme $\rho = A/r$. Al centro della cavità c'è una carica puntiforme Q. Quanto deve valere A se nel guscio il campo elettrico ha intensità costante?
>>> soluzione: portare i calcoli fino in fondo → $A = Q/(2\pi a^2)$

14) Su un piano vengono disposti un lungo segmento sottile su cui è distribuita una carica elettrica con densità $\lambda = 1\ \mu C/m$ e, a distanza d = 2 cm, una lamina rettangolare di dimensioni a = 3 cm e b = 4 su cui è presente una densità di carica superficiale $\sigma = 1\ nC/m^2$. Determinare la forza agente sulla lamina.
>>> soluzione: 0,66 μN



15) Nel vuoto sono presenti due distribuzioni uniformi di carica statica. Una, con densità di carica $\rho = 2\ nC/m^3$, è distribuita all'interno di un cilindro indefinito di raggio a = 5 cm. L'altra, con densità di carica $\lambda = -3\ nC/m$, è distribuita lungo un segmento di lunghezza l = 17,2 cm posto, come in figura, a distanza d = 10 cm dall'asse del cilindro.
Determinare l'intensità della forza che si esercita fra le due distribuzioni di carica.
>>> soluzione: 0,85 nN (attrattiva)



16) Una carica elettrica è distribuita in una regione cilindrica di altezza infinita e raggio R con densità di volume $\rho(r)= k/r$ con r distanza dall'asse. Determinare l'intensità del campo elettrico in tutti i punti dello spazio
>>> soluzione: r<R: $E = k/\varepsilon_0$; r>R: $E = kR/(r\varepsilon_0)$

17) Graficare l'andamenti della componente x del campo elettrostatico originato da uno strato piano di carica uniformemente distribuito con densità ρ fra il piano di coordinata x = -d/2 e quello di coordinata x = +d/2.
{sugg. utilizzare il teorema di Gauss scegliendo un cilindro con basi parallele allo strato di carica ed equidistanti dal piano x = 0}
>>> soluzione: per $0<x<d/2$: $E_x(x) = \rho x/\varepsilon_0$; per $d/2<x$: $E_x(x) = \rho d/2\varepsilon_0$

SOLUZIONI/SUGGERIMENTI

1) considerare il campo generato dalla carica distribuita dalla superficie infinitesima $2\pi R\sin\theta\ R d\theta$
3) $E_x = - \sigma_0/3\pi\varepsilon_0$
6) $Q = cd^5\varepsilon_0$
7) $kq/d^2 = 9\ 10^9\ 10^{-9} = 9$ V/m
8) $Q = \lambda\ ad/(a+d)$
9) disegnare le cariche e la superficie di Gauss
10) $|\lambda_1|=|\lambda_2|=\lambda$ a) $\lambda\delta/[\pi\varepsilon_0(d^2+\delta^2)]$ b) $\lambda\delta/[\pi\varepsilon_0(d^2-\delta^2)]$
12) al centro del cubo, il campo elettrico generato dal cubo forato, sommato al campo generato dal disco, è nullo
13) $[Q+\int_{a\to r}\rho 4\pi r'^2 dr']/4\pi\varepsilon_0 r^2 = [Q+2\pi A(r^2-a^2)]/4\pi\varepsilon_0 r^2 = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2 + A/2\varepsilon_0 - 2\pi A a^2/4\pi\varepsilon_0 r^2 = cost$
→ $Q/4\pi\varepsilon_0 r^2 - 2\pi A a^2/4\pi\varepsilon_0 r^2 = 0$ → $Q = 2\pi A a^2$
14) $dF = dq\ E = \sigma\ dx\ dy\ \lambda/(2\pi\varepsilon_0 x)$ $d<x<d+a$; $0<y<b$
15) $F = (a^2\rho\lambda)/(2\varepsilon_0)\ \ln[(d+l)/d]$
16) r<R: $2\pi r\ h\ E = 1/\varepsilon_0 \int_0^r \frac{k}{r} h\ 2\pi r\ dr$ r>R: $2\pi r\ h\ E = 1/\varepsilon_0 \int_0^R \frac{k}{r} h\ 2\pi r\ dr$

ULTERIORI SUGGERIMENTI DA NON LEGGERE SE NON DOPO AVER PROVATO E RIPROVATO

2) $\phi = q/6\varepsilon_0$

3) $\lambda = \sigma R\, d\theta = \sigma_0 \sin^2\theta\, R\, d\theta \rightarrow Ex = -\sigma_0/3\pi\varepsilon_0$

6) integrare la densità di carica (funzione di z) sul volume del cubo

7) $Ex = k\, d/r\; q/r^2 - k\, d/r\; 2q/r^2 = -kdq/r^3$ $\quad$ $Ey = -k\, \delta/r\; q/r^2 - k\, \delta/r\; 2q/r^2 = -3k\delta q/r^3$

8) $\int_0^a \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(a+d-x)^2} = 1/4\pi\varepsilon_0\, Q/d^2$

15) Gauss: $2\pi rh\, E(r) = \pi a^2 h\, \rho/\varepsilon_0 \rightarrow E(r) = (a^2\rho)/(2\varepsilon_0\, r)$; $\quad dF = E(r)\, \lambda dr$ da integrare da d a d+l