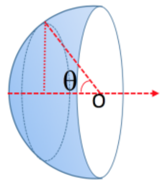
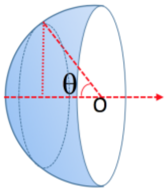
dopo la 2° ESERCITAZIONE – altri esercizi di elettrostatica

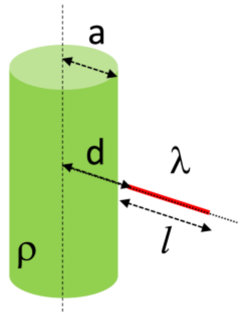
es1) Su una semisfera di raggio R = 10 cm centrata nell'origine è distribuita uniformemente una densità di carica σ = +3,1 $\mu C/m^2$. Determinare nell'origine l'intensità del campo.
>>> soluzione: $E = \sigma/4\varepsilon_0$ = 9 kV/m



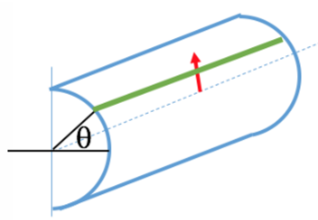


es2) Su una semisfera di raggio R = 10 cm centrata nell'origine è distribuita una densità di carica $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$ con σ_0 = 10 nC/m^2. Una carica puntiforme q = 1 nC è ferma nell'origine. Determinare l'energia cinetica che acquista allontanandosi infinitamente dalla semisfera.
>>> soluzione: $K=q\sigma_0 R/4\varepsilon_0$

es3) Nel vuoto sono presenti due distribuzioni uniformi di carica statica. Una, con densità di carica ρ = 2 nC/m^3, è distribuita all'interno di un cilindro indefinito di raggio a = 5 cm. L'altra, con densità di carica λ = -3 nC/m, è distribuita lungo un segmento di lunghezza l = 17,2 cm posto, come in figura, a distanza d = 10 cm dall'asse del cilindro.
Determinare l'intensità della forza che si esercita fra le due distribuzioni di carica.
>>> soluzione: 0,85 nN (attrattiva)



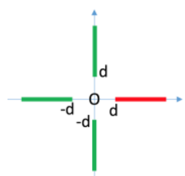
es4) Su una superficie semicilindrica <u>infinitamente</u> lunga di raggio R = 1 mm è distribuita una carica positiva con densità $\sigma = \sigma_0 \sin^2\theta$. Determinare il valore del campo elettrico in un punto dell'asse della figura (σ_0 = 10 nC/m^2).
{suggerimento: suddividere la superficie in fili carichi paralleli all'asse}
>>> soluzione: E = 120 V/m



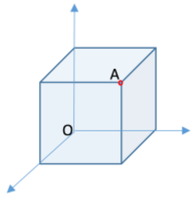
es5) Atomo di idrogeno: ricavare e graficare approssimativamente l'andamento $E_r(r)$ della componente radiale del campo elettrico generato da una carica positiva puntiforme q+ = e circondata da una carica negativa di valore complessivo q- = -e distribuita uniformemente <u>su</u> una <u>superficie</u> sferica di raggio R = 0,05 nm centrata intorno alla carica positiva.

es6) Una carica elettrica è distribuita all'interno di un guscio sferico di raggi a e b con densità di volume $\rho = k/r$ dipendente da r, distanza dal centro del guscio. Determinare l'intensità del campo elettrico sulle due superfici del guscio. Quale carica puntiforme Q andrebbe posta nel centro della distribuzione per avere E(a) = E(b)?
>>> soluzione: 0; $\frac{k(b^2-a^2)}{2\varepsilon_0 b^2}$; $Q = 2\pi k\, a^2$

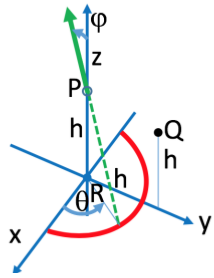
es7) I quattro segmenti lunghi L riportati in figura distano d dal cento O. Tre sono uniformemente carichi con densità lineare λ, il quarto segmento ha densità $-\lambda$.
Determinare la differenza di potenziale $V(0)-V(\infty)$.
>>> soluzione: $V = \lambda/(2\pi\varepsilon_0) \ln[(L+d)/d]$



es8) Nello spazio è presente un campo elettrico **E** = c z^3 **k** con c = 10 MV/m^4.
Facendo riferimento al cubo di lato d = 5 cm in figura determinare la differenza di potenziale $\Delta V = V_A - V_O$.
>>> soluzione: $V_A - V_O = -15{,}6$V



es9) Si consideri una carica –Q uniformemente distribuita in una sfera di raggio R al cui centro è posta una carica puntiforme +Q. Determinare l'andamento del potenziale elettrico in funzione della distanza r dal centro della sfera assumendolo nullo a grande distanza.
>>> soluzione: V(r>R) = 0; V(r<R) = $1/(4\pi\varepsilon_0)$ $[1/r-1/R+(r^2-R^2)/2R^3]$



es10) Un anello carico di forma semicircolare e raggio R = 3 cm, con densità di carica λ = 10 nC/m giace su un semipiano x-y come indicato in figura.
Una carica Q = -0,3 nC giace nel punto Q = {0, h, h} con h = 4 cm.
Calcolare il potenziale elettrico generato dall'intero sistema nel punto P = {0, 0, h} ipotizzando $V_\infty = 0$.
>>> soluzione: 102 V

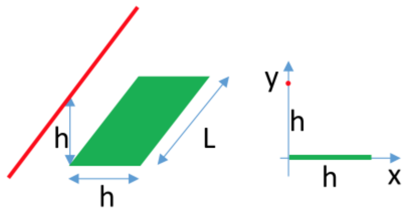
es11) Una carica elettrica nel vuoto è uniformemente distribuita su i piani di coordinate x = 0 (con densità di carica $-\sigma$) e x = d (con densità di carica 2σ). Determinare l'espressione del potenziale V(x) per ogni x e graficarla considerando V(0) = 0 V.
>>> soluzione: V(x<0) = ½ $\sigma x/\varepsilon_0$; V(0<x<d) = 3/2 $\sigma x/\varepsilon_0$; V(x>d) = 3/2 $\sigma d/\varepsilon_0$ - ½ $\sigma(x-d)/\varepsilon_0$

es12) Graficare gli andamenti della densità di carica, della componente x del campo elettrico e del potenziale originati da uno strato piano di carica uniformemente distribuita con densità ρ fra le coordinate x = -d/2 e x = +d/2.
Quanto vale la differenza di potenziale ΔV = V(d/2)-V(-d/2) fra le due superfici che delimitano la carica elettrica?
{sugg. utilizzare il teorema di Gauss scegliendo un cilindro con basi parallele allo strato di carica ed equidistanti dal piano x = 0}
>>> soluzione: $E_x(-d/2<x<d/2) = \rho x/\varepsilon_0$; ΔV = 0 V

es13) Il modello di Thomson dell'atomo di idrogeno prevedeva che la carica positiva +e fosse uniformemente all'interno di una sfera di raggio R. Determinare il moto di un elettrone (carica –e, massa m) inizialmente fermo sulla superficie della sfera.
>>> soluzione: moto armonico $\omega^2 = e^2/(4\pi\varepsilon_0 m R^3)$

es14) In un guscio sferico (raggio interno a; raggio esterno b) è distribuita una carica con densità non uniforme ρ = A/r. Al centro della cavità c'è una carica puntiforme Q. Quanto deve valere A se nel guscio il campo elettrico ha intensità costante?
>>> soluzione: portare i calcoli fino in fondo → $A = Q/(2\pi a^2)$

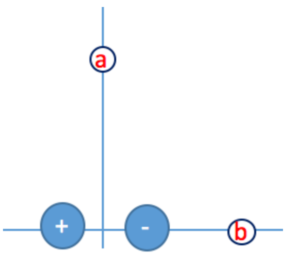
es15) Sul piano XZ è appoggiato un rettangolo di lati h e L sul quale è uniformemente distribuita una carica con densità σ. A distanza h dal piano è disposto, parallelamente al lato L, un lungo filo carico con densità lineare λ. Ricavare le componenti della forza che agisce sul rettangolo.



A seconda dello svolgimento potrebbero essere utili:

$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c \qquad \int \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + c \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\text{arctg}(x) + c$

>>> soluzione: $F_x = \lambda\sigma L/2\pi\varepsilon_0 \ \ln(\sqrt{2})$ $\quad F_y = -\lambda\sigma L/2\pi\varepsilon_0\ \pi/4$



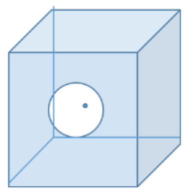
es16) Date due distribuzioni rettilinee indefinite con densità di carica λ_1 = +4 μC/m e λ_2 = -4 μC/m poste parallelamente a distanza 2δ = 2 cm, determinare il campo elettrico:

a) in un punto posto a distanza d = 6 cm dal piano contenente le due cariche filiformi e situato simmetricamente rispetto ad esse

b) in un punto del piano contenente le due cariche filiformi posto a $d+\delta$ = 7 cm da λ_1 e a $d-\delta$ = 5 cm da λ_2.

>>> soluzione: a) 0,39 MV/m; b) 0,41 MV/m

es17) Il campo elettrico in un punto dell'asse di un disco di raggio R, con densità di carica uniforme σ, a distanza z dal piano del disco vale $E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$. Utilizzare tale relazione per calcolare il valore del campo elettrico al centro di una superficie cubica di lato L con la stessa densità di carica σ e forata circolarmente (R = L/4) al centro di una delle 6 superfici.



{Suggerimento: se non ci fosse il foro, data la simmetria... inoltre il campo elettrico è additivo...}

>>> soluzione: $(\sigma/2\varepsilon_0)(1-2/\sqrt{5})$

es18) Una carica elettrica è distribuita in una regione cilindrica di altezza infinita e raggio R con densità di volume $\rho(r)$= k/r con r distanza dall'asse. Determinare l'intensità del campo elettrico in tutti i punti dello spazio

>>> soluzione: $r<R$: $E = k/\varepsilon_0$; $r>R$: $E = kR/(r\varepsilon_0)$

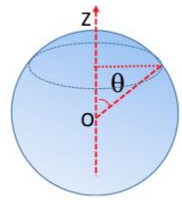
es19) Una carica elettrica è distribuita in una regione cilindrica di altezza infinita e raggio R con densità di volume $\rho(r)$= k/r (r distanza dall'asse). Dopo aver verificato che l'intensità del campo elettrico vale: $E(r<R) = k/\varepsilon_0$ e $E(r>R) = kR/(r\varepsilon_0)$ determinare il valore del potenziale $V(r>R)$ ponendolo nullo sull'asse.

>>> soluzione: $V(r>R) = -kR/\varepsilon_0\,[1+\ln(r/R)]$

es20) Due piani paralleli indefiniti uniformemente carichi con densità σ_1 = + 0,89 nC/m^2 e $\sigma_2 = -½\,\sigma_1$ sono posti a distanza d = 1 cm. Determinare la differenza di potenziale fra i due piani.

>>> soluzione: V_2-V_1 = -0,75 V

es21) Su una sfera di raggio R = 10 cm centrata nell'origine è distribuita simmetricamente rispetto all'asse Z una densità di carica $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$ con $\sigma_0 = 10$ nC/m^2. Determinare il valore del campo elettrico nell'origine, il valore Q_+ della carica complessiva sulla semisfera con z>0, il valore Q_- della carica complessiva sulla semisfera con z<0 e della differenza di potenziale fra l'origine e un punto all'infinito.



>>> soluzione: $\mathbf{E}(0,0,0) = -\mathbf{k}\sigma_0/(3\varepsilon_0)$; $Q_+ = \pi\sigma_0 R^2$; $Q_- = -\pi\sigma_0 R^2$; 0

SOLUZIONI/SUGGERIMENTI

1) considerare il campo generato dalla carica distribuita dalla superficie infinitesima $2\pi R\sin\theta\, R d\theta$

3) $F = (a^2\rho\lambda)/(2\varepsilon_0) \ln[(d+l)/d]$

4) $\lambda = \sigma R\, d\theta = \sigma_0 \sin^2\theta\, R\, d\theta \rightarrow E_x = -\sigma_0/3\pi\varepsilon_0$

7) considerando il solo tratto negativo: $dV_i = -\lambda\, dx/(4\pi\varepsilon_0 x)$ con $d<x<d+L$.

I quattro contributi sono uguali in modulo $\rightarrow V(0) = (3-1)\, \lambda/4\pi\varepsilon_0) \ln[(L+d)/d]$

9) $E(r<R) = Q/(4\pi\varepsilon_0)(1/r^2-r/R^3)$; $E(r>R) = 0$

10) $V(0,0,h) = \lambda R\pi/[4\pi\varepsilon_0(R^2+h^2)^{1/2}]+Q/(4\pi\varepsilon_0 h)$

13) calcolare $\mathbf{E}(r)$; $m\mathbf{a} = q\mathbf{E}$; $E(r<R) = 1/(4\pi\varepsilon_0)\, Q(1/r^2-r/R^3)$

14) $[Q+\int_{a\rightarrow r}\rho 4\pi r'^2 dr']/4\pi\varepsilon_0 r^2 = [Q+2\pi A(r^2-a^2)]/4\pi\varepsilon_0 r^2 = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2 + A/2\varepsilon_0 - 2\pi A a^2/4\pi\varepsilon_0 r^2 = \text{cost}$

$\rightarrow Q/4\pi\varepsilon_0 r^2 - 2\pi A a^2/4\pi\varepsilon_0 r^2 = 0 \rightarrow Q = 2\pi A a^2$

16) $|\lambda_1|=|\lambda_2|=\lambda$ a) $\lambda\delta/[\pi\varepsilon_0(d^2+\delta^2)]$ b) $\lambda\delta/[\pi\varepsilon_0(d^2-\delta^2)]$

17) al centro del cubo, il campo elettrico generato dal cubo forato, sommato al campo generato dal disco, è nullo

18) r<R: $2\pi r\, h\, E = 1/\varepsilon_0 \int_0^r \frac{k}{r} h\, 2\pi r\, dr$ r>R: $2\pi r\, h\, E = 1/\varepsilon_0 \int_0^R \frac{k}{r} h\, 2\pi r\, dr$

20) $V_2-V_1 = -\frac{3}{4}\, \sigma d/\varepsilon_0$

21) $E_z(0) = -\sigma_0/(6\varepsilon_0) \cos^3\theta|_{\text{fra } 0 \text{ e } \pi}$; $Q_+ = \pi\sigma_0 R^2 \sin^2\theta|_{\text{fra } 0 \text{ e } \pi/2}$; $Q_- = \pi\sigma_0 R^2 \sin^2\theta|_{\text{fra } \pi/2 \text{ e } \pi}$; $V(0) = Q/(4\pi\varepsilon_0 R)$

ULTERIORI SUGGERIMENTI DA NON LEGGERE SE NON DOPO AVER PROVATO E RIPROVATO

3) Gauss: $2\pi rh\ E(r) = \pi a^2 h\ \rho/\varepsilon_0 \rightarrow E(r)= (a^2\rho)/(2\varepsilon_0\ r)$; $dF = E(r)\ \lambda dr$ da integrare da d a d+l