

SCRITTO DI FISICA II
ing civile dell'8 giugno 2016

1. È data una sfera conduttrice isolata di carica Q_1 e di raggio $R_1 = 5\text{cm}$ centrata in "O". Sostituendo tale sfera con un'altra di raggio $R_2 = 2R_1$ e di carica $Q_2 = 2Q_1$ sempre centrata in "O", a quale distanza R^* da "O" l'energia contenuta nel volume di spazio sferico corrispondente, è uguale per le due situazioni?
2. Una corrente di 4A viene suddivisa in tre rami tutti in parallelo e dello stesso materiale. Le lunghezze ℓ dei cavi dei tre rami sono in rapporto 1, 2 e 3 mentre i loro raggi r sono nel rapporto 2,3 e 4. Trovare le correnti I_1 , I_2 e I_3 che scorrono nei tre rami.
3. Un conduttore cilindrico molto lungo di raggio $R = 1\text{cm}$ è percorso da una corrente di densità $J = 10^6\text{A/m}^2$ uniforme. Calcolare l'energia immagazzinata in un tratto lungo $L = 20\text{m}$.
4. In un solenoide rettilineo e indefinito di raggio R , variando opportunamente l'intensità della corrente che circola nelle spire, il modulo dell'induzione magnetica \mathbf{B} viene fatto crescere linearmente nel tempo in ragione di α , con $\alpha > 0$. Si determini il vettore campo elettrico indotto, \mathbf{E} , in funzione della distanza r dall'asse del solenoide, con $r \leq R$.
 - a) Ricavare la legge di Gauss in forma integrale. Ricavarla anche in forma differenziale per mezzo del teorema della divergenza. Descriverla indicando il significato, le proprietà ed applicandola in un piccolo esempio.
 - b) Ricavare le impedenze per gli elementi R , L e C sottoposti a una tensione variabile sinusoidalmente con pulsazione ω

SOLUZIONI SCRITTO DI FISICA II
ing civile dell'8 giugno 2016

1) Per la prima sfera, l'energia U_1 contenuta nella porzione sferica di spazio a distanza R^* è data da

$$U_1 = \int_{R_1}^{R^*} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R^*} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R^*} \right)$$

eguagliando tale energia a quella dell'espressione analoga per la seconda sfera si ha

$$\frac{Q_1^2}{R_1} - \frac{Q_1^2}{R^*} = \frac{Q_2^2}{R_2} - \frac{Q_2^2}{R^*}$$

da cui

$$R^* = 3R_1 = 15\text{cm}$$

2) Dal momento che la resistenza lungo un ramo è pari a $R = \rho\ell/(\pi r^2)$, le tre resistenze stanno nel rapporto

$$R_1 : R_2 : R_3 = \frac{\ell_1}{r_1^2} : \frac{\ell_2}{r_2^2} : \frac{\ell_3}{r_3^2} = \frac{1}{4} : \frac{2}{9} : \frac{3}{16}$$

Si sa anche che sono in parallelo quindi $I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3$ quindi

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{2} I_1 = \frac{9}{8} I_1$$

$$I_3 = \frac{R_1}{R_3} I_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} I_1 = \frac{4}{3} I_1$$

infine, dal momento che $I_1 + I_2 + I_3 = 4\text{A}$ si ha

$$I_1 + \frac{9}{8} I_1 + \frac{4}{3} I_1 = \frac{83}{24} I_1 = 4\text{A} \implies I_1 = \frac{96}{83} \text{A} = 1,16\text{A}$$

$$I_2 = \frac{9}{8} I_1 = 1,30\text{A} \quad \text{e} \quad I_3 = \frac{4}{3} I_1 = 1,54\text{A}$$

3) L'energia si ricava integrando la densità di energia di volume $u = B^2/(2\mu_0)$ nel cilindro di lunghezza L e volume infinitesimo $d\tau = 2\pi rLdr$. Quindi è necessario conoscere l'andamento di $B(r)$ ricavabile dalla legge di Ampère:

$$2\pi rB(r) = \mu_0\pi r^2J$$

per cui $B(r) = \mu_0rJ/2$, infine

$$U = \int u d\tau = \frac{\pi L\mu_0J^2}{4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi L\mu_0J^2R^4}{16} = 49,3mJ$$

4) Ponendo l'asse delle x coincidente con l'asse del solenoide e orientato nel verso di \mathbf{B} , si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \alpha \mathbf{i} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\alpha \mathbf{i} \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{1}{2}\alpha \mathbf{i} \times \mathbf{r};$$

quindi \mathbf{E} ha modulo $1/2r\alpha$ è tangente alla circonferenza di raggio r diretto nel verso opposto a quello di scorrimento della corrente. Si può ragionare anche utilizzando la terza equazione di Maxwell in forma integrale considerando una circonferenza di raggio r concentrica con l'asse del solenoide:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \Rightarrow E2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \alpha,$$

da cui si ricava $E = -1/2r\alpha$, in cui il segno meno, avendo orientato il versore \mathbf{n} parallelo a \mathbf{i} indica che \mathbf{E} è tangente alla circonferenza di raggio r con verso opposto a quello di scorrimento della corrente nelle spire del solenoide.