SCRITTO DI FISICA II
ing civile dell'8 luglio 2016

1. Due sfere conduttrici isolate di raggi $R_1 = 2\text{cm}$ e $R_2 = 4\text{cm}$ sono poste a una distanza d molto maggiore dei loro raggi e hanno una piccola carica positiva pari a $Q_1 = Q_2 = Q$. Vengono in seguito portate a contatto e separate di nuovo alla stessa distanza di prima. Trovare l'espressione per il rapporto tra le forze di repulsione alla distanza d prima (F) e dopo (F') il contatto e il suo valore numerico.

2. Calcolare l'energia potenziale elettrostatica U spettante ad una sfera isolata, posta nel vuoto, di raggio R e uniformemente carica con carica totale Q.

3. È dato un disco di raggio R carico superficialmente con densità di carica uniforme σ Il disco è posto in rotazione in senso antiorario attorno all'asse ortogonale e passante per il centro diretto lungo l'asse z positivo, con velocità angolare ω. Trovare il vettore $\mathbf{B}$ al centro del disco.

4. È data una bacchetta metallica, di lunghezza ℓ libera di scorrere tra due guide metalliche che si possono collegare tra loro formando un circuito di resistenza R. Un campo magnetico è presente, uniforme e perpendicolare al piano del circuito. Una forza F esterna fa muovere la bacchetta con velocità v costante. a) Dimostrare l'uguaglianza delle espressioni dell'intensità di corrente I_L che scorre nel circuito ricavata attraverso la forza di Lorentz, e quella I_F ricavata attraverso la legge di Faraday. b) Dimostrare l'uguaglianza delle due espressioni della potenza P_f esercitata dalla forza esterna e della potenza P_R dissipata dalla resistenza del circuito. c) se il circuito è sul piano xy, la bacchetta mobile è ortogonale all'asse x e si allontana nel verso delle x crescenti e il campo magnetico è in direzione $-z$, in che verso, visto dalle z positive scorrerà la corrente?

a) Ricavare le espressioni per le combinazioni in serie e in parallelo per le resistenze e per i condensatori. Ricavare l'espressione della capacità per un condensatore piano
b) Data la legge di Ampère in forma differenziale, ricavare la legge di Ampère-Maxwell in forma differenziale utilizzando l'equazione di continuità. Trasformatela nella forma integrale utilizzando il teorema di Stokes.

SOLUZIONI SCRITTO DI FISICA II
ing civile dell'8 luglio 2016

1) La forza di repulsione prima del contatto è

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

Quando le sfere sono poste in contatto la carica si distribuirà in maniera tale che $Q_1' + Q_2' = 2Q$ inoltre andranno allo stesso potenziale

$$V = \frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Risolvendo queste due condizioni si trova che

$$Q_1' = \frac{2QR_1}{R_1 + R_2} \qquad \text{e} \qquad Q_2' = \frac{2QR_2}{R_1 + R_2}$$

dopo il contatto una volta che le sfere vengono riportate a distanza d si avrà la forza di repulsione

$$F' = \frac{Q_1' Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \frac{4Q^2 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

per cui il rapporto tra le forze sarà

$$\frac{F}{F'} = \frac{Q^2}{Q_1' Q_2'} = \frac{(R_1 + R_2)^2}{4R_1 R_2} = \frac{9}{8}$$

---

2) L'energia elettrostatica si può calcolare tramite il campo elettrico il quale ha due differenti espressioni una interna e una esterna alla sfera:

$$\text{per} \quad r \leq R \qquad 4\pi r^2 E_1 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \Longrightarrow E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

$$\text{per} \quad r \geq R \qquad E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Quindi i due contributi all'energia elettrostatica dati dal campo elettrico all'interno U_1 e all'esterno U_2 saranno

$$U_1 = \int_{\tau_{int}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2 d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 4\pi \int_0^R E_1^2 r^2 dr = \frac{Q^2}{2(4\pi\varepsilon_0)}\frac{1}{R^6}\int_0^R r^4 dr = \frac{Q^2}{10(4\pi\varepsilon_0)}\frac{1}{R}$$

$$U_2 = \int_{\tau_{est}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2 d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 4\pi \int_R^\infty E_2^2 r^2 dr = \frac{Q^2}{2(4\pi\varepsilon_0)}\int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{2(4\pi\varepsilon_0)}\frac{1}{R}$$

L'energia elettrostatica potenziale totale sarà infine

$$U = U_1 + U_2 = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}$$

---

3) Il disco che ruota, carico in maniera uniforme, puó essere visto come un insieme di spire elementari di raggio variabile r, di superficie elementare $ds = 2\pi r dr$ quindi di carica elementare $dq = 2\pi r\sigma dr$ che, ruotando alla frequenza di $\nu = \omega/(2\pi)$ volte per unità di tempo, è come se facessero scorrere la corrente elementare $dI = \nu dq = \omega\sigma r dr$. Considerando l'espressione del vettore campo magnetico per una spira di raggio r, al suo centro $B = \mu_0 I/(2r)$ diretto ortogonalmente al piano della spira in modo da vedere la corrente girare in senso antiorario, la spira elementare produrrá un campo magnetico elementare $dB = \mu_0 dI/(2r)$ quindi il campo magnetico totale, diretto come indicato, avrà modulo

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma \int_0^R dr = \frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma R$$

4a) Ogni carica libera q sulla bacchetta subirà una forza di Lorentz di modulo pari a $F_L = qvB$, corrispondente a un campo elettromotore di lorentz $E_L = F_L/q = vB$ e quindi sul circuito agirà una forza elettromotrice

$$f.e.m. = \int E_L d\ell = \ell v B \Longrightarrow I_L = f.e.m./R = \frac{\ell v B}{R}$$

Se consideriamo Faraday e l'area $ds = \ell dx$ spazzata dalla bacchetta in un tempo dt

$$f.e.m. = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\ell dxB}{dt} = \ell vB \Longrightarrow I_F = f.e.m./R = \frac{\ell vB}{R}$$

4b) La forza esterna necessaria per mantenere la bacchetta a velocità costante è pari, in modulo, alla forza di origine magnetica, che si oppone al moto, data dalla formula di Laplace che in questo caso è $F = I\ell B$. Quindi la potenza necessaria è data da

$$P_f = Fv = I\ell Bv = \frac{v^2B^2\ell^2}{R}$$

La potenza dissipata dalla resistenza R del circuito è per effetto Joule $P_R = RI^2$ quindi

$$P_R = RI^2 = \frac{v^2B^2\ell^2}{R}$$

4c) Il flusso del campo magnetico in direzione $-z$ è crescente quindi, per la legge di Lenz, la corrente scorrerà in maniera tale da creare un flusso uscente in direzione $+z$ cioè in senso antiorario.