# DIARIO DELLE LEZIONI DEL CORSO DI LABORATORIO DI MATEMATICA A.A. 2016/2017 CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ENERGETICA

DANIELE ANDREUCCI
DIP. SCIENZE DI BASE E APPLICATE PER L'INGEGNERIA
UNIVERSITÀ LA SAPIENZA
VIA A.SCARPA 16, 00161 ROMA, ITALY

# 1. Mercoledì 1/3/2017

Presentazione del corso.
1) Il modello differenziale di crescita di popolazioni; crescita esponenziale (malthusiana):

$$\dot{N}(t) = rN(t)\,,$$

con $r > 0$ costante. Crescita illimitata e irrealistica.
2) Correzione logistica:

$$\dot{N}(t) = rN(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big)\,,$$

con $r$, $K > 0$ costanti. Integrazione esplicita per mezzo della separazione delle variabili. Analisi qualitativa delle soluzioni nei casi $N > K$ e $K > N > 0$: a parte quella nulla tutte tendono a $K$ per $t \to +\infty$, monotonamente. Esistenza dei due punti di equilibrio $N = 0$ (instabile) e $N = K$ (stabile).
3) Equazione logistica modificata:

$$\dot{N}(t) = rN(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big)^p\,,$$

con $p > 1$ intero dispari (per esempio $p = 3$). Motivazione intuitiva della modifica (aumenta lo smorzamento per $N$ vicino a $K$). Analisi qualitativa delle soluzioni non mediante l'espressione esplicita, ma mediante lo studio del segno di $\dot{N}$ e il seguente lemma:
*Se $N \in C^1(\mathbb{R})$ è tale che sia $N$ che la sua derivata $\dot{N}$ hanno limite per $t \to +\infty$ e il limite di $N$ è finito, allora il limite di $\dot{N}$ è nullo.*
Di nuovo si vede che tutte le soluzioni a parte quella $N = 0$ tendono a $K$ per $t \to +\infty$.
4) Confronto delle soluzioni dei due modelli, logistico e logistico modificato, nel caso di dati iniziali compresi in $(0, K)$. Se $x$ e $y$ risolvono rispettivamente

$$\begin{aligned} &\dot{x} = rx\Big(1 - \frac{x}{K}\Big)\,, \qquad && \dot{y} = ry\Big(1 - \frac{y}{K}\Big)^3\,, \\ &x(0) = N_0\,, && y(0) = N_1 < N_0\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

allora $x(t) > y(t)$ per ogni $t > 0$. Questo segue dal 'teorema di Fermat in un estremo':
*Se $f \in C^1([a, b])$, $f(t) \geq f(b)$ per ogni $t \in [a, b]$, allora $f'(b) \leq 0$;*
e confrontando $\dot{x}(\bar{t})$ con $\dot{y}(\bar{t})$ se $\bar{t}$ è l'ipotetico primo punto ove $x(\bar{t}) = y(\bar{t})$ (qui si usano le equazioni differenziali).
Estensione dell'analisi al caso $N_1 = N_0$, basata sullo stesso argomento una volta che si osservi che in questo caso $\dot{x}(0) > \dot{y}(0)$ (segue anch'essa

dalle equazioni differenziali), e che per la formula di Taylor questo implica $x(t) > y(t)$ per $t$ piccolo.
5) Analisi qualitativa dell'andamento asintotico per $t \to +\infty$ di una soluzione dell'equazione logistica modificata

$$\dot{y} = ry\Big(1 - \frac{y}{K}\Big)^p ,$$

$p > 1$ intero dispari, nel caso $y(t) > K$.
a) Sappiamo che $y(t) \to K$. Scriviamo allora

$$y(t) = K(1 + \varphi(t)) ,$$

con $\varphi(t) > 0$, $\varphi(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. Sostituendo nell'equazione differenziale si trova

$$\dot{\varphi} = -r\varphi^p - r\varphi^{p+1} .$$

Intuitivamente il secondo termine conta meno del primo, per cui ci si aspetta che $\varphi \sim z$ per $t \to +\infty$, ove $z$ risolve

$$\dot{z} = -rz^p ,$$

con una dato iniziale opportuno. Cerchiamo di indagare la cosa in modo più rigoroso. Poiché in effetti il secondo membro dell'equazione per $z$, se $z = \varphi$, è maggiore di quello dell'equazione per $\varphi$, un argomento come quello del punto 4) dimostra che se $z(t_0) = \varphi(t_0)$ per qualche $t_0$ si ha $\varphi(t) < z(t)$ per $t > t_0$. Questo dà una stima di $\varphi$ da sopra. D'altra parte noi sappiamo che $\varphi(t) \to 0$, dunque fissato ad arbitrio $\varepsilon$, si ha $0 < \varphi(t) < \varepsilon$ per $t > t(\varepsilon)$. Perciò

$$\dot{\varphi}(t) > -r(1 + \varepsilon)\varphi^p , \qquad t > t(\varepsilon) .$$

Pertanto come sopra si mostra che $\varphi(t) > z_\varepsilon(t)$ per $t > t(\varepsilon)$, ove $z_\varepsilon$ risolve

$$\dot{z}_\varepsilon = -r(1 + \varepsilon)z_\varepsilon^p .$$

Questo dà una stima di $\varphi$ da sotto.
Si noti che sia $z$ che $z_\varepsilon$ si trovano facilmente per separazione delle variabili e decrescono a zero rispettivamente come $(r(p-1)t)^{-1/(p-1)}$ e $(r(1+\varepsilon)(p-1)t)^{-1/(p-1)}$.
b) In alternativa, si sostituisce nell'equazione uno sviluppo della forma $y \sim K + KAt^{-\frac{1}{p-1}}$ e si ritrova $A = (r(p-1))^{-1/(p-1)}$.

**Esercizio 1.1.** (Facile) Si spieghi perché nel punto 5b) il tentativo non riesce se si prova con $y \sim K + KAt^\alpha$ con $\alpha \neq -1/(p-1)$.
(Difficile) Si riproduca l'analisi del punto 4) nella regione $x$, $y > K$, ossia si assuma per esempio nella (1.1) che $N_0 = N_1 > K$; si osservi che occorre distinguere tra due casi ... ma asintoticamente dovrà essere pur sempre $x(t) < y(t)$ e dunque ... $\square$

## 2. Mercoledì 8/3/2017

L'equazione della crescita logistica con termine di mortalità:

$$\dot{N} = rN\Big(1 - \frac{N}{K}\Big) - hN \,,$$

ove $h > 0$.
Effetto sui punti di equilibrio: sono

$$N = 0 \,, \qquad N = \frac{r-h}{r} K \,.$$

Dunque se $0 < h < r$ si ha un equilibrio positivo cui tendono tutte le soluzioni salvo $N = 0$.

**Esercizio 2.1.** Dimostrare che se $r = h$ tutte le soluzioni tendono a $N = 0$ con velocità polinomiale. $\square$

*Equazione di Monod (o di Michaelis-Menten).* Supponiamo che la popolazione $N$ venga predata dalla $P$; se $P$ è costante e vale la legge dell'azione di massa, il termine di mortalità nell'equazione è $-\lambda NP$, e siamo nel caso già visto.
Se invece supponiamo che ciascun predatore debba impiegare una frazione $\mu\tilde{N}$ dell'unità di tempo a processare la preda, ove $\tilde{N}$ è appunto la preda catturata nell'unità di tempo, si ha

$$\tilde{N} = \lambda N(1 - \mu\tilde{N}) \,,$$

che dà

$$\tilde{N} = \frac{\lambda N}{1 + \lambda\mu N} \,.$$

Dunque l'equazione diviene

$$\dot{N} = rN\Big(1 - \frac{N}{K}\Big) - \frac{\lambda N}{1 + \lambda\mu N} P \,,$$

ove assumiamo ancora che $P$ sia costante. Adimensionalizzando con

$$N(t) = \alpha x(\tau) \,, \qquad \tau = \beta t \,,$$

per una scelta opportuna di $\alpha$ e $\beta$ si arriva a

$$\dot{x} = qx\Big(1 - \frac{x}{k}\Big) - \frac{x}{1+x} \,,$$

per due costanti positive $q$ e $k$.
Studiando i punti di equilibrio di questa equazione si vede che almeno per certi valori dei parametri sono $x = 0$ e $x = x_1$, $x = x_2$, con $x_2 > x_1 > 0$. Se $0 < x(0) < x_1$ si ha che $x(t) \to 0$ per $t \to +\infty$.

*Cenno ai sistemi lineari di equazioni differenziali* $2 \times 2$. Consideriamo il sistema di 2 equazioni differenziali in due incognite

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \,,$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \,,$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x} \,, \quad \text{(prodotto righe per colonne)}, \quad \boldsymbol{\mathcal{A}} = (a_{ij}) \,.$$

Si vede che se $\boldsymbol{v} \neq 0$ è un autovettore di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ con autovalore $\lambda$, ossia se $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, la funzione vettoriale del tempo (che può essere pensata come un moto)

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{v} \,,$$

risolve il sistema (usando la forma vettoriale). [Questo è vero perfino se $\lambda \in \mathbb{C}$.]
Dunque se $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ha due autovettori linearmente indipendenti $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ di autovalori rispettivamente $\lambda_1$ e $\lambda_2$, un integrale generale del sistema è

$$k_1 e^{\lambda_1}\boldsymbol{v}_1 + k_2 e^{\lambda_2}\boldsymbol{v}_2 \,,$$

con $k_1$, $k_2$ costanti arbitrarie. Da questo segue per esempio che se $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$ e $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$ allora tutte le soluzioni soddisfano $\boldsymbol{x}(t) \to (0,0)$ per $t \to +\infty$.
L'orbita di una soluzione è la traiettoria disegnata da $\boldsymbol{x}(t)$ nel piano. Questa è diversa dal grafico della soluzione che è una curva di $\mathbb{R}^3$ data da $(t, x_1(t), x_2(t))$.

**Esempio 2.2.** Il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \,, \\ \dot{x}_2 &= x_1 \,, \end{aligned} \qquad \boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,,$$

corrisponde agli autovalori $\lambda = \pm i$. Moltiplicando la prima per $x_1$, la seconda per $x_2$ e sommando si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = 0 \,,$$

dunque le orbite sono circonferenze di centro l'origine (che sono percorse di moto circolare uniforme antiorario). In altre parole

$$x_1^2 + x_2^2$$

è un *integrale primo*.
Derivando la seconda e sostituendo nella prima si ha l'equazione dei moti armonici

$$\ddot{x}_2 + x_2 = 0 \,.$$

□

**Esercizio 2.3.** Si ripeta l'analisi dell'esempio per il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2\,,\\ \dot{x}_2 &= 4x_1\,.\end{aligned}$$

□

*Il modello di Lotka-Volterra.* Il seguente modello fu proposto da Vito Volterra per spiegare l'evoluzione della numerosità relativa nelle diverse specie di pescato nell'Adriatico, dopo la I guerra mondiale:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= rV - \alpha VP\,,\\ \dot{P} &= -qV + \beta VP\,.\end{aligned}$$

Qui $V$ è la preda, $P$ il predatore, e $r$, $q$, $\alpha$, $\beta$ sono parametri positivi. Adimensionalizzando mediante

$$\lambda V(t) = x(\tau)\,,\quad \mu P(t) = y(\tau)\,,\quad t = \nu\tau\,,$$

si arriva scegliendo opportunamente i parametri a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy\,,\\ \dot{y} &= -ay + xy\,.\end{aligned}$$

Analizzando il segno di $\dot{x}$, $\dot{y}$ (nel I quadrante), si vede che le due rette $x = a$ e $y = 1$ individuano 4 regioni ove tali segni si mantengono costanti. Dunque tenendo di conto queste informazioni si scopre che le orbite 'si avvolgono' intorno al punto di equilibrio $(a, 1)$.
Resta da vedere che sono chiuse, e quindi corrispondono a soluzioni periodiche. Questo si ottiene dividendo membro a membro le equazioni e poi separando le variabili; si ha

$$\dot{x}\frac{x-a}{x} = \dot{y}\frac{1-y}{y}\,.$$

Integrando si ha che su ciascuna orbita la funzione

$$F(x, y) = x - a\ln x + y - \ln y$$

si mantiene costante (*integrale primo*). Dunque assumendo che il punto iniziale dell'orbita fosse $(\bar{x}, 1)$ con $\bar{x} > a$ si vede che l'orbita dopo un giro intorno s $(a, 1)$ non può intersecare $y = 1$ per $x > a$ altro che ancora in $(\bar{x}, 1)$ perché $F(x, 1)$ è strettamente crescente per $x > a$ (studiando la derivata prima).
In effetti occorre anche sapere che l'orbita non può finire su $x = 0$ o $y = 0$, ma questo segue dal fatto che:
Se $\dot{x} \geq -kx$, $k > 0$ costante e $x(\bar{t}) > 0$ allora $x(t) \geq x(\bar{t})e^{-k(t-\bar{t})} > 0$ per $t > \bar{t}$.

**Esercizio 2.4.** 1) Se
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$
è un sistema di equazioni differenziali $2 \times 2$, si dimostri che ha le stesse orbite di
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \lambda \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$
ove $\lambda > 0$ è una costante.
2) (Difficile) Se
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$
è un sistema di equazioni differenziali $2 \times 2$, si dimostri che ha le stesse orbite di
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \lambda(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$
ove $\lambda(\boldsymbol{x}) > 0$ è una funzione scalare strettamente positiva. $\square$

## 3. Mercoledì 15/3/2017

*Cristallizzazione di un amorfo: il modello di Kolmogorov-Avrami.* Un materiale amorfo inizia a cristallizzare; gli aggregati cristallini nascono con volume nullo e crescono come sfere (nell'opportuno senso in dimensione 1, 2, 3). Il problema di determinare in ogni tempo $t$ la frazione cristallina $w(t)$ non è banale perché la crescita dei cristalli è ostacolata da quelli già presenti.

Definiamo con $V(t)$ il volume teorico, ossia quello che sarebbe presente se quest'effetto di smorzamento non esistesse. La legge di Kolmogorov-Avrami dice che

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = (1-w)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad V = -\ln(1-w)\,,$$

ossia che nella media statistica un nuovo volume teorico di cristallo diviene reale solo per la frazione corrispondente al volume libero $1-w$. Si noti che il modello non segue ciascun singolo cristallo nella sua evoluzione (dipendente da quella degli altri).

D'altra parte se denotiamo con $\dot{N}_0$ il numero di nuovi cristalli apparsi nell' unità di tempo nell'unità di volume (libero) e con $\dot{R}_0$ la velocità di crescita del raggio di un cristallo libero (entrambi assunti costanti), contando i contributi dei cristalli nati nell'intervallo $(0,t)$ si ha (in dimensione 2 per fissare le idee)

$$V(t) = \int_0^t \dot{N}_0 \pi (\dot{R}_0(t-\tau))^2 \,\mathrm{d}\tau = \frac{\pi}{3}\dot{N}_0 \dot{R}_0^2 t^3\,.$$

Da qui si può invertire la dipendenza ottenendo $t = t(V)$ e sostituire in

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \pi \dot{N}_0 \dot{R}_0^2 t^2 = K V^{\frac{2}{3}}\,,$$

con $K > 0$ costante opportuna. Dalla legge di Kolmogorov-Avrami quindi si ha l'equazione dinamica

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = K(1-w)[-\ln(1-w)]^{\frac{2}{3}}\,. \tag{3.1}$$

Poiché per $w \ll 1$ $\ln(1-w) \sim -w$, per $w \ll 1$ si ha

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \sim K w^{\frac{2}{3}}\,.$$

La dipendenza non lispchitziana dell'equazione dall'incognita spiega perché al dato iniziale $w(0) = 0$ possa corrispondere anche una soluzione positiva, pur essendo $w \equiv 0$ una soluzione (non unicità).

**Per casa 3.1.** 1) Si ripeta la derivazione dell'equazione differenziale in (3.1) nei casi di dimensione 1 e 3.
2) Si mostri che in ogni caso si trovano infinite soluzioni, ciascuna che soddisfa $w(t) = 0$, $t \leq \bar{t}$, e $w(t) > 0$, $t > \bar{t}$, con $\bar{t}$ arbitrario. □

*I numeri di Fibonacci.* Nella dinamica di popolazioni, se l'incremento è stagionale, ossia il tempo è discreto, il numero di individui si può rappresentare come una successione $a_n$ ($n$ è il tempo).
Una successione ben nota è la seguente (numeri di Fibonacci):

$$N_{n+1} = N_n + N_{n-1} \,, \qquad n \geq 1 \,,$$

con $N_1$, $N_0 \geq 0$ assegnati. Qui $N_n$ rappresenta il numero di coppie al tempo $n$; ciascuna coppia a ogni incremento del tempo produce un'altra coppia, ma non al primo incremento dalla sua nascita.
Si vede che $N_n > 0$ (a meno che $N_1 = N_0 = 0$), è crescente e che $N_n \to +\infty$ (considerando che il limite se fosse finito dovrebbe soddisfare $L = L + L$).
Passiamo a considerare la successione dei rapporti $x_n = N_n/N_{n-1}$, che evidentemente soddisfa

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} =: F(x_n) \,.$$

Si osservi che $F$ è decrescente.
Si vede che se $x_n$ (che non è monotona) ha limite esso soddisfa

$$L = 1 + \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \,.$$

Se per fissare le idee supponiamo che $x_1 < L$, si osserva dalla definizione che

$$x_{2n+1} < L \,, \qquad x_{2n} > L \,.$$

Inoltre si ha per esempio

$$x_{2n+2} = 1 + \frac{x_{2n}}{1 + x_{2n}} < x_{2n} \quad \Leftrightarrow \quad x_{2n} > L \,.$$

Perciò $x_{2n}$ è monotona e tende a un limite $\ell$ che soddisfa

$$\ell = 1 + \frac{\ell}{1 + \ell} \quad \Rightarrow \quad \ell = L \,.$$

Nello stesso modo si vede che $x_{2n+1} \to L-$. Quindi $x_n \to L$.
Interpretazione grafica: diagramma del grafico di $F(x)$ all'intersezione con $y = x$; ricorrenza.
Caso di

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n^p} \,,$$

con $p > 0$, $x_n > 0$. Si vede che esiste il limite $L$ allora $L = 1$. Tuttavia assumendo ancora $x_1 < 1$ e dividendo la successione in due sottosuccessioni come sopra si ha che

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &\to 1- \,, \quad x_{2n} \to 1+ \,, \qquad \text{se } p < 1; \\ x_{2n+1} &\to 0 \,, \quad x_{2n} \to +\infty \,, \qquad \text{se } p > 1; \\ x_{2n+1} &= x_1 \,, \quad x_{2n} = x_2 \,, \qquad \text{se } p = 1. \end{aligned}$$

Quindi $x = 1$ è asintoticamente stabile se e solo se $p < 1$. Questo è un esempio della seguente *Regola*:
Se $x_{n+1} = F(x_n)$, $L = F(L)$, allora $L$ è asintoticamente stabile se $|F'(L)| < 1$, è instabile se $|F'(L)| > 1$.
Interpretazione grafica del comportamento di $x_n$ nei vari casi, e della Regola.

*La mappa logistica.* Se il tempo è discreto l'equazione della crescita con correzione logistica può essere scritta come

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) =: G(x_n) \,,$$

ove si è posto $x_n = N_n/K$.
Si assume che $r \leq 4$ cosicché

$$G([0,1]) \subset [0,1] \,.$$

Si vede poi che $G(L) = L$ se e solo se $L = 0$ o

$$L = L_r := 1 - \frac{1}{r} \,,$$

assumendo che $r > 1$ affinché questa quantità sia in $(0, 1)$. Si vede con i calcoli che

$$G'(L_r) = 2 - r \,,$$

e dunque in base alla *Regola* sopra, $L_r$ è asintoticamente stabile se $1 < r < 3$, instabile se $4 \geq r > 3$.

**Per casa 3.2.** Si studino i possibili comportamenti di una successione

$$x_{n+1} = F(x_n) \,, \qquad n \geq 0 \,,$$

con $x_0 > 0$ e $F : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ crescente, dimostrando che la successione ha sempre limite. □

*Dimostrazione di simulazione numerica di problemi differenziali.* Sistemi lineari 2×2 con i vari casi di autovalori reali e complessi. Comportamento asintotico delle soluzioni.
Il sistema di Lotka-Volterra, orbite periodiche.
Il modello di Kolmogorov-Avrami in dimensione 2 e 3.

## 4. Mercoledì 5/4/2017

**Esercitazione:**
**Esercizio 1.** Senza risolvere l'equazione

$$\dot{x} = (\cos x)^3 \,,$$

e assumendo come noto che le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$:

(1) Si trovino tutti i punti di equilibrio (ossia tutte le soluzioni costanti).
(2) Si dimostri che tutte le soluzioni restano limitate, ossia che $|x(t)| \leq C$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per una opportuna costante $C$.
(3) Si trovi per ogni soluzione $x$

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) \,.$$

**Esercizio 2.** Si considerino i due problemi di Cauchy:

$$\dot{x}_1 = -Ax_1(K - x_1)^2 \,, \qquad \dot{x}_2 = -Ax_2(K - x_2)^4 \,,$$
$$x_1(0) = \frac{K}{2} \,; \qquad x_2(0) = b \,.$$

Qui $A > 0$ e $1 > K > 0$ sono parametri assegnati.

(1) Una sola delle due affermazioni seguenti è vera:
a) *Se $K > b > K/2$ allora $x_2(t) > x_1(t)$ per ogni $t > 0$;*
b) *Se $0 < b < K/2$ allora $x_2(t) < x_1(t)$ per ogni $t > 0$;*
La si individui e dimostri.
(2) Si estenda il risultato precedente al caso $b = K/2$.
(3) Si adimensionalizzi l'equazione per $x_1$ mostrando come si possono rimuovere i parametri $A$ e $K$.

**Esercizio 3.** Si considerino le successioni definite per ricorrenza per ogni $n \geq 0$ da:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n^2}{3} \,, & a_0 &= 1 \,; \\
b_{n+1} &= \frac{b_n^2}{3} \,, & b_0 &= 4 \,; \\
c_{n+1} &= \sin(c_n) \,, & c_0 &= 1 \,; \\
d_{n+1} &= \cos(d_n) \,, & d_0 &= \frac{\pi}{3} \,.
\end{aligned}$$

Per ciascuna si determini se ha limite e quale per $n \to +\infty$, eventualmente aiutandosi con un grafico.

Risoluzione e discussione degli esercizi proposti.

## 5. Mercoledì 26/04/2017

Richiami sugli spazi vettoriali. Lo spazio di tutte le successioni reali

$$\mathbb{R}^\infty = \Big\{ \{x_k\} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_k \in \mathbb{R} \Big\} ,$$

come spazio vettoriale di dimensione infinita, con le operazioni

$$\{x_k\} + \{y_k\} = \{x_k + y_k\} , \qquad \lambda\{x_k\} = \{\lambda x_k\} .$$

L'insieme $\mathcal{S}$ delle successioni $\{u_n\}$ che soddisfano (per $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ fissati)

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n , \qquad n \geq 0 , \tag{5.1}$$

con $u_0$, $u_1$ dati ad arbitrio è un sottospazio vettoriale (ossia somme e prodotti per scalari di successioni che soddisfano (5.1) soddisfano ancora (5.1)). $\mathcal{S}$ ha dimensione 2, e una base è data da $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ con

$$x_0 = 1 , \quad x_1 = 0 , \quad x_n \text{ come in (5.1) per } n \geq 2;$$
$$y_0 = 0 , \quad y_1 = 1 , \quad y_n \text{ come in (5.1) per } n \geq 2.$$

Quindi ogni altra successione $\{u_n\}$ in $\mathcal{S}$ è data da una combinazione lineare $A\{x_n\} + B\{y_n\}$, ove $A$ e $B$ sono determinati da

$$Ax_0 + By_0 = u_0 ,$$
$$Ax_1 + By_1 = u_1 .$$

Si vede che infatti $u_n = Ax_n + By_n$ per ogni $n$. In generale due successioni di $\mathcal{S}$ sono una base se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} \neq 0 . \tag{5.2}$$

Si cercano allora successioni in $\mathcal{S}$ della forma $x_n = q^n$, $n \geq 0$. Sostituendo in (5.1) si ha che questo è possibile se e solo se (dividendo per $q^n$)

$$q^2 = \alpha q + \beta ,$$

che prende il nome di equazione caratteristica. Supponendo che $\alpha^2 + 4\beta > 0$ questa equazione ha 2 radici reali distinte $q_1$ e $q_2$ che quindi soddisfano (5.2), e pertanto tutte le successioni in $\mathcal{S}$ sono date da

$$u_n = Aq_1^n + Bq_2^n , \qquad n \geq 0 ,$$

ove $A$ e $B$ sono determinati da

$$A + B = u_0 ,$$
$$Aq_1 + Bq_2 = u_1 .$$

La successione può quindi essere calcolata direttamente (non per ricorrenza).

**Esempio 5.1.** I numeri di Fibonacci sono un esempio della teoria sopra, con $\alpha = \beta = 1$. Si calcola

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \qquad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,$$

cosicché se $N_0 = N_1 = 1$ si ha

$$N_n = A q_1^n + B q_2^n\,,$$

con $A$ e $B$ determinati in modo opportuno. Notando che $q_1 > 1$, $0 > q_2 > -1$ si vede che per $n \to \infty$

$$N_n \sim A q_1^n\,.$$

Si noti che la base $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ costruita come sopra è invece data in sostanza da traslazioni della stessa successione di Fibonacci. □

**Esempio 5.2.** Successione delle medie aritmetiche

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{2}\,, \qquad n \geq 0\,.$$

Con i calcoli si ottiene $q_1 = 1$, $q_2 = -1/2$. Si ricava che

$$u_n \to \frac{u_0}{3} + \frac{2u_1}{3}\,, \qquad n \to \infty\,.$$

□

**Per casa 5.3.** 1) Si ripeta l'analisi dell'ultimo esempio nel caso $\alpha$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$.
2) Si dimostri che la successione aritmetica

$$u_{n+1} = u_n + d\,, n \geq 0$$

è in realtà nella forma vista sopra. □

Somiglianza con il caso delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti del secondo ordine.
Generalizzazione a

$$u_{n+k+1} = \alpha_1 u_{n+k} + \dots + \alpha_{k+1} u_n\,.$$

*Modelli di crescita di popolazioni con raccolta.* 1) Consideriamo il caso di crescita logistica con raccolta fissa $H > 0$ (*quota fissa di raccolta*):

$$\dot{x} = rx\Big(1 - \frac{x}{K}\Big) - H\,.$$

Esistono due punti di equilibrio positivi di cui il maggiore $x_2$ è stabile ma il minore $x_1$ è instabile. Se $x(0) < x_1$ allora $x(t)$ diviene nullo in un tempo finito (estinzione).

2) Caso della raccolta proporzionale: se $E > 0$ è lo sforzo, si assume che la raccolta sia proporzionale a $x$ e a $E$:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex\,.$$

Questa equazione si può riscrivere come

$$\dot{x} = (r - E)x\left(1 - \frac{rx}{K(r - E)}\right),$$

che quindi ha il punto di equilibrio stabile $K' = K(1 - E/r) < K$, ove si suppone $0 < E < r$.
La raccolta all'equilibrio quindi è

$$h(K') = EK\left(1 - \frac{E}{r}\right).$$

Si vede che il massimo ottenibile si ha per $E = r/2$ e vale $Kr/4$.
Nel caso di una equazione più generale

$$\dot{x} = F(x) - Ex\,,$$

con $F$ regolare concava in $[0, K]$, $F(0) = F(K) = 0$ si possono ottenere risultati qualitativamente simili con un'analisi grafica delle intersezioni dei grafici di $F(x)$ e $Ex$.
Il caso $E > r$, o $E > F'(0)$ per equazioni di forma generale, dà un solo punto di equilibrio $x = 0$, e implica quindi che ogni soluzione decresca a 0 per $t \to +\infty$.
*Caso dell'evoluzione in tempo discreto con raccolta.* In questo caso, adatto per popolazioni con un ritmo stagionale di crescita, l'equazione prende la forma

$$P_{k+1} = G(P_k) - H(P_k)\,,$$

ove $G$ dà la crescita e $H$ la raccolta; $P_k$ è la numerosità della popolazione al passo $k$. La funzione $G$ è strutturalmente diversa dalla $F$ in tempo continuo. Questo si può mettere in evidenza analizzando una discretizzazione dell'equazione differenziale, ed è dovuto almeno a due fattori: $G(P_k)$ non è solo un tasso di variazione, come $F(x)$, ma contiene il contributo $P_k$; $G$ deve dipendere dall'intervallo di tempo in cui si è operata la discretizzazione.

## 6. Mercoledì 3/5/2017

*Il modello SIR.* All'inizio del XX secolo fu sviluppato il seguente modello per la diffusione di malattie epidemiche:

$$\dot S = -\beta S I \,,$$
$$\dot I = \beta S I - \nu I \,,$$
$$\dot R = \nu I \,.$$

Qui $S$ indica il numero dei suscettibili di ammalarsi, $I$ quello degli infetti, $R$ quello dei rimossi (non più infettivi). Il parametro $\beta > 0$ indica il tasso di trasmissione, e $1/\nu$ ha il significato di durata della fase infettiva (malattia). Tra le altre ipotesi implicate dal modello, ricordiamo: terminata la fase infettiva non ci si ammala più; vale la legge dell'azione di massa per i contatti tra $S$ e $I$.
Si noti che la III equazione è in pratica irrilevante per le prime due.
Si dimostrano nell'ordine i seguenti fatti:

(1) $S + I + R$ si mantiene costante nel tempo (uguale alla numerosità totale della popolazione, $N$).

(2) Se $S(0)$, $I(0) > 0$, $R(0) \geq 0$ allora $S(t)$, $I(t)$, $R(t) > 0$ per ogni $t > 0$, dunque ciascuna delle 3 variabili è maggiorata da $N$.

(3) Esistono per monotonia (vedi la I e la III) i limiti

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = S(\infty) \geq 0 \,, \qquad \lim_{t\to+\infty} R(t) = R(\infty) > 0 \,.$$

Dunque esiste anche il limite

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} [N - S(t) - R(t)] = N - S(\infty) - R(\infty) = I(\infty) \geq 0 \,.$$

(4) In realtà vale $I(\infty) = 0$; se fosse $I(\infty) > 0$ dalla III si otterrebbe $R(\infty) = +\infty$ assurdo perché $R(t) \leq N$. *Quindi in ogni caso la malattia si estingue.*

(5) Dalla II usando $\dot S < 0$ si ha

$$\dot I = (\beta S - \nu) I \leq (\beta S(0) - \nu) I = \nu (R_e - 1) I \,,$$

ove $R_e = \beta S(0)/\nu$ è il tasso efficace di trasmissione. Dunque se $R_e < 1$, vale $\dot I \leq 0$ per ogni $t$, con estinzione monotona della malattia.

(6) Se invece $R_e > 1$,

$$\dot I(0) = \nu (R_e - 1) I(0) > 0 \,,$$

e inizialmente $I$ cresce. Però sappiamo già che $I(\infty) = 0$, dunque $\dot I$ deve annullarsi almeno una volta. In effetti dalla II si vede che $\dot I = 0$ se e solo se $S = \nu/\beta$. Ma $S$ è strettamente decrescente, dunque esiste un unico $t_1 > 0$ ove $S(t_1) = \nu/\beta$. Perciò $I$ cresce in $(0, t_1)$ e decresce in $(t_1, +\infty)$.

(7) Per evitare lo scoppio dell'epidemia quindi occorre rendere $R_e < 1$, ossia diminuire il tasso di trasmissione, la durata della malattia, e il bacino di suscettibili $S(0)$ (vaccinazioni).

(8) Per determinare $I_{max} = I(t_1)$ dividiamo la II per la I ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} = -1 + \frac{\nu}{\beta S}\,.$$

Si usano qui i teoremi sulla derivazione di funzione composta e di funzione inversa. Integrando questa si ottiene l'integrale primo

$$I + S - \frac{\nu}{\beta}\ln S = C = \text{ costante}\,,$$

lungo la soluzione (la costante è determinata dai valori iniziali). Ponendo $S = \nu/\beta$ si ha

$$I_{max} = -\frac{\nu}{\beta} + \frac{\nu}{\beta}\ln\frac{\nu}{\beta} + C\,.$$

(9) Dall'integrale primo si ha che ovviamente $S(t)$ non può tendere a zero (altrimenti il logaritmo diverrebbe illimitato). Dunque $S(\infty) > 0$. *Quindi non tutti i suscettibili si ammalano.*

(10) Per stimare $S(\infty)$ dividiamo la I per la III ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R} = -\frac{\beta}{\nu}S\,,$$

Quindi

$$S = S(0)e^{-\frac{\beta}{\nu}(R-R(0)} \geq S(0)e^{-\frac{\beta}{\nu}N}\,,$$

che dà la stima richiesta.

(11) L'integrale primo dà anche la forma delle orbite nel piano $(S, I)$ (sono le curve di livello della funzione che dà l'integrale primo).

**Esempio 6.1.** Se $I(0) = 0$ tutte le tre variabili restano costanti per ogni $t$. □

**Per casa 6.2.** Trattare il caso $R_e = 1$. □

*Metodo dei minimi quadrati.* Volendo approssimare nel modo ottimale il gruppo di dati

$$\{(x_i, y_i)\}\,, \qquad i = 1, \dots, N\,,$$

con la funzione lineare $f(x) = rx$ occorre scegliere $r$ in modo da minimizzare

$$g(r) = \sum_{i=1}^{N}(rx_i - y_i)^2\,.$$

Con il calcolo si vede che va scelto

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \, .$$

In modo simile si vede che la costante $s$ che minimizza

$$h(s) = \sum_{i=1}^N (s - y_i)^2$$

è la media aritmetica tra gli $y_i$.
Volendo cercare il punto $(\bar{x}, \bar{y})$ che minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai punti $(x_i, y_i)$ va trovato il punto di minimo della funzione

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^N (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \, .$$

Questo dà il punto che ha per coordinate le medie aritmetiche delle coordinate dei $(x_i, y_i)$.

**Per casa 6.3.** Ripetere i calcoli sopra nel caso di medie pesate: occorre cioè minimizzare

$$\sum_{i=1}^N p_i (r x_i - y_i)^2 \, , \qquad \sum_{i=1}^N p_i (s - y_i)^2 \, , \qquad \sum_{i=1}^N p_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] \, ,$$

con $p_i > 0$. □

*Metodo per la risoluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie.*
Volendo calcolare numericamente la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= f(y) \, , \\ y(0) &= u_0 \, , \end{aligned}$$

si può procedere così: fissato $\bar{t} > 0$ si divide l'intervallo $[0, \bar{t}]$ con i punti $i\bar{t}/N$, $i = 0, \ldots N$; qui $N > 1$ è un intero fissato. Su ciascun subintervallo $(i\bar{t}/N, (i+1)\bar{t}/N]$ l'approssimante $z_N$ si calcola come una funzione lineare data da

$$z_N(t) = z_N\Big(i\frac{\bar{t}}{N}\Big) + \Big(t - i\frac{\bar{t}}{N}\Big) f\Big(z_N\Big(i\frac{\bar{t}}{N}\Big)\Big) \, .$$

Ossia si prende come approssimazione costante della derivata il suo valore nell'estremo di sinistra. Si noti che il valore di $z_N$ in tale estremo è stato calcolato nel passo precedente.
Si può dimostrare che nelle ipotesi opportune $z_N$ converge alla soluzione $y$ per $N \to +\infty$.

**Esempio 6.4.** Se $f(y) = y$ si ottiene

$$z_N(\bar{t}) = u_0 \Big( 1 + \frac{\bar{t}}{N} \Big)^N ,$$

che converge a $u_0 e^{\bar{t}}$ per $N \to +\infty$, come si vede subito applicando la formula di Taylor al logaritmo di $z_N(\bar{t})$. □

*Risoluzione per serie di e.d.o. lineari omogenee a coefficienti costanti.* Consideriamo il problema di Cauchy

$$y' = \alpha y ,$$
$$y(0) = u_0 .$$

Sostituendo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n ,$$

con gli $a_n$ da determinare, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n ,$$

che dopo un cambiamento di indice nella prima serie dà identificando i coefficienti dei termini dello stesso grado

$$a_{m+1} = \alpha \frac{a_m}{m+1} ,$$

che conduce a $a_m = \alpha^m u_0 / m!$ (si è usato $a_0 = y(0) = u_0$). Dunque

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_0 \frac{(\alpha x)^n}{n!} = u_0 e^{\alpha x} .$$

Se *definiamo* $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$ come le soluzioni dei due problemi di Cauchy

$$\begin{aligned} y_1'' + y_1 &= 0 , & y_2'' + y_2 &= 0 , \\ y_1(0) &= 0 , & y_2(0) &= 1 , \\ y_1'(0) &= 1 , & y_2'(0) &= 0 , \end{aligned}$$

e procediamo in modo simile a quanto sopra otteniamo in effetti che $y_1$ e $y_2$ sono espressi dalle consuete serie di potenze di seno e coseno. Calcolo per $y_1$.

**Per casa 6.5.** Fare nel dettaglio il calcolo per $y_2$. □

Resterebbero da dimostrare le solite proprietà di seno e coseno, per esempio che $y_1' = y_2$ e $y_2' = -y_1$. Dimostriamo la prima. Si vede che $y_1'$ risolve la stessa equazione differenziale di $y_2$; inoltre

$$y_1'(0) = 1 = y_2(0) , \qquad (y_1')'(0) = y_1''(0) = -y_1(0) = 0 = y_2'(0) ,$$

ove si è usata anche la e.d.o. per $y_1$. Perciò $y_2$ e $y_1'$ risolvono lo stesso problema di Cauchy e quindi per il teorema di unicità coincidono.
Da questo segue la solita identità goniometrica fondamentale; infatti

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y_1(x)^2 + y_2(x)^2] &= 2[y_1(x)y_1'(x) + y_2(x)y_2'(x)] \\ &= 2[y_1(x)y_2(x) - y_2(x)y_1(x)] = 0\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$y_1(x)^2 + y_2(x)^2 = y_1(0)^2 + y_2(0)^2 = 1\,.$$

# 7. Mercoledì 10/05/2017

**Esercizio 7.1.** Risoluzione per serie di potenze di $y'(x) = x^2 y(x)$. $\square$

*Principio di Duhamel.* Secondo il principio di Duhamel la soluzione di un problema lineare con sorgente non nulla si ottiene come sovrapposizione di soluzioni di problemi con sorgente nulla ma dati 'iniziali' corrispondenti a un 'impulso' pari alla sorgente stessa.
Come primo esempio consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} u' &= a(t)u + f(t)\,. \\ u(0) &= u_0\,. \end{aligned}$$

Si può scrivere $u = y + w$ ove $y$ e $w$ risolvono

$$\begin{aligned} y' &= a(t)y + f(t)\,, \qquad & w' &= a(t)w\,, \\ y(0) &= 0\,; & w(0) &= u_0\,, \end{aligned}$$

come si verifica con semplici calcoli. La $w$ si trova subito (per esempio per separazione delle variabili) come

$$w(t) = u_0 e^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}\,.$$

Per trovare la $y$ applichiamo il principio di Duhamel: vogliamo scrivere

$$y(t) = \int_0^t z(t, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{7.1}$$

ove, applicando appunto il principio,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= a(t)z\,, \qquad t > \tau\,, \\ z(\tau, \tau) &= f(\tau)\,. \end{aligned}$$

La soluzione $z$ è

$$z(t, \tau) = f(\tau) e^{\int_\tau^t a(s)\,\mathrm{d}s}\,, \qquad t \geq \tau\,.$$

Dunque

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) e^{\int_\tau^t a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

In effetti si verifica che $y$ è la soluzione cercata. Infine si ottiene

$$u(t) = u_0 e^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s} + \int_0^t f(\tau) e^{\int_\tau^t a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\tau\,,$$

ossia la classica formula risolutiva del problema di Cauchy per e.d.o. lineari del primo ordine.

Come secondo esempio di applicazione del principio di Duhamel consideriamo il problema

$$
\begin{aligned}
y'' + \omega^2 y &= f(t)\,,\\
y(0) &= 0\,,\\
y'(0) &= 0\,,
\end{aligned}
$$

con $\omega > 0$.
Vogliamo ancora scrivere $y$ usando la (7.1); partiamo da questa per determinare il problema che definisce $z$ in questo caso. Derivando in $t$, e usando il teorema di derivazione di integrali dipendenti da parametro,

$$
y'(t) = z(t,t) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.
$$

Varie considerazioni ci spingono a porre a questo punto

$$
z(t,t) = 0\,, \tag{7.2}
$$

riservandoci di usare poi il principio di Duhamel che suggerisce di usare $f$ come impulso iniziale per $z$. Per esempio, l'equazione per $y$ collega $f$ a $y''$ e non a $y'$. Inoltre in questo modo la condizione $y'(0) = 0$ risulta verificata; la $y(0) = 0$ segue subito dalla (7.1).
Derivando ancora, assumendo la (7.2), si ottiene

$$
y''(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t,t) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.
$$

Dunque si dovrà avere

$$
y'' + \omega^2 y = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t,t) + \int_0^t \left\{ \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t,\tau) + \omega^2 z(t,\tau) \right\} \mathrm{d}\tau = f(t)\,.
$$

Guidati dal principio di Duhamel chiediamo dunque

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t,\tau) + \omega^2 z(t,\tau) &= 0\,, \qquad t > \tau\,,\\
z(\tau,\tau) &= 0\,,\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(\tau,\tau) &= f(\tau)\,.
\end{aligned}
$$

Come è noto la e.d.o. per $z$ è l'equazione dei moti armonici che ha integrale generale

$$
\eta(t) = k_1 \cos(\omega t) + k_2 \sin(\omega t)\,.
$$

I coefficienti si determinano in modo che

$$z(\tau,\tau) = k_1 \cos(\omega\tau) + k_2 \sin(\omega\tau) = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(\tau,\tau) = -k_1\omega \sin(\omega\tau) + \omega k_2 \cos(\omega\tau) = f(\tau)\,.$$

Con i calcoli si ottiene

$$k_1 = -\frac{f(\tau)}{\omega}\sin(\omega\tau)\,, \qquad k_2 = \frac{f(\tau)}{\omega}\cos(\omega\tau)\,,$$

cosicché sostituendo nell'integrale generale le $k_i$ e usando le formule di addizione per il seno

$$z(t,\tau) = \frac{f(\tau)}{\omega}\sin(\omega(t-\tau))\,,$$

e

$$y(t) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{\omega}\sin(\omega(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau\,.$$

*Variazione delle costanti.* In alternativa al principio di Duhamel, mostriamo come il secondo esempio sopra possa essere trattato con il metodo della variazione delle costanti. Cerchiamo la $y$ nella forma

$$y(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t)\,, \tag{7.3}$$

ove $y_1$ e $y_2$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, per esempio come sopra

$$y_1(t) = \cos(\omega t)\,, \qquad y_2(t) = \sin(\omega t)\,.$$

Si noti che se nella (7.3) prendessimo le $v_i$ costanti otterremmo quindi una soluzione dell'equazione omogenea. L'idea è trovare $v_1$ e $v_2$ non costanti tali che invece $y$ risolva l'equazione non omogenea.
Derivando

$$y' = v_1'y_1 + v_2'y_2 + v_1y_1' + v_2y_2'\,.$$

Poniamo (come ipotesi di lavoro)

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0\,,$$

e derivando ancora otteniamo

$$y'' = v_1'y_1' + v_2'y_2' + v_1y_1'' + v_2y_2''\,.$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$\begin{aligned} y'' + \omega^2 y = v_1'y_1' + v_2'y_2' + v_1(y_1'' + \omega^2 y_1) + v_2(y_2'' + \omega^2 y_2) \\ = v_1'y_1' + v_2'y_2' = f(t)\,. \end{aligned}$$

Dunque abbiamo il sistema (ricordando le definizioni di $y_i$)

$$v_1' \cos(\omega t) + v_2' \sin(\omega t) = 0 \,,$$
$$-v_1' \omega \sin(\omega t) + v_2' \omega \cos(\omega t) = f(t) \,.$$

Da qui si ricava

$$v_1'(t) = -\frac{f(t)}{\omega} \sin(\omega t) \,, \qquad v_2'(t) = \frac{f(t)}{\omega} \cos(\omega t) \,,$$

da cui integrando

$$v_1(t) = v_{10} - \int_0^t \frac{f(\tau)}{\omega} \sin(\omega \tau) \, \mathrm{d}\tau \,, \qquad v_2(t) = v_{20} + \int_0^t \frac{f(\tau)}{\omega} \cos(\omega \tau) \, \mathrm{d}\tau \,.$$

Le costanti di integrazione $v_{i0}$ vanno scelte per soddisfare i dati iniziali di $y$; segue $v_{10} = v_{20} = 0$.
Quindi portando tutto sotto unico integrale

$$\begin{aligned} y(t) &= -\int_0^t \frac{f(\tau)}{\omega} \sin(\omega \tau) \, \mathrm{d}\tau \cos(\omega t) + \int_0^t \frac{f(\tau)}{\omega} \cos(\omega \tau) \, \mathrm{d}\tau \sin(\omega t) \\ &= \int_0^t \frac{f(\tau)}{\omega} \sin(\omega (t - \tau)) \, \mathrm{d}\tau \,, \end{aligned}$$

che risulta uguale ovviamente all'espressione già trovata con il principio di Duhamel.
Si verifica che per $\omega \to 0$ la soluzione trovata converge alla soluzione del problema di Cauchy con $\omega = 0$.

## 8. Mercoledì 17/05/2017

**Esercitazione:**
1) Risolvere mediante il principio di Duhamel il problema

$$
\begin{aligned}
y'' - \omega^2 y &= f(t)\,,\\
y(0) &= 0\,,\\
y'(0) &= 0\,.
\end{aligned}
$$

In alternativa è possibile usare la tecnica di variazione delle costanti.
2) Si consideri la successione definita per ricorrenza da

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n\,, \qquad n \geq 0\,,$$

con $u_1$, $u_0 \in \mathbb{R}$ assegnati ad arbitrio.
a) Siano $\alpha$, $\beta > 0$, con $\alpha + \beta = 1$; si trovi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n\,,$$

per $u_1$, $u_0 \in \mathbb{R}$ assegnati.
b) Si dimostri che se $\alpha$, $\beta > 0$, con $\alpha + \beta < 1$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0\,,$$

per ogni scelta di $u_1$, $u_0 \in \mathbb{R}$.
3) Si consideri la seguente variazione del modello SIR ove gli infettivi restano sempre tali:

$$
\begin{aligned}
\dot{S} &= -\beta S I\,,\\
\dot{I} &= \beta S I\,,
\end{aligned}
$$

con $\beta > 0$, $S(0) > 0$, $I(0) > 0$, $S(0) + I(0) = N$.
a) Si dimostri che

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = 0\,, \qquad \lim_{t\to+\infty} I(t) = N\,.$$

b) Si determini il valore di $S$ e $I$ nell'istante in cui il tasso di infezione $\dot{I}$ è massimo.
c) Si mostri che in realtà $I$ soddisfa un'equazione differenziale del tipo della crescita logistica.

Risoluzione degli esercizi proposti.

Gradiente e laplaciano di funzioni radiali
$$F(\boldsymbol{x}) = u(|\boldsymbol{x}|)\,,$$
in dimensione 2 e 3.
Problema al contorno nel piano per $c$, $k$ costanti
$$\begin{aligned} \Delta F &= c\,, \qquad &|\boldsymbol{x}| < R\,,\\ F(\boldsymbol{x}) &= k\,, \qquad &|\boldsymbol{x}| = R\,. \end{aligned}$$
Sua traduzione (la soluzione è radiale)
$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r &= c\,, \qquad 0 < r < R\,,\\ u(R) &= k\,,\\ u &\quad \text{regolare in } [0, R]. \end{aligned}$$
Cenno alle equazioni di Eulero e soluzione del problema precedente.
Approssimazione del problema precedente mediante le soluzioni di
$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r &= c\,, \qquad 0 < \varepsilon < r < R\,,\\ u(R) &= k\,,\\ u(\varepsilon) &= m\,, \end{aligned}$$
per $\varepsilon \to 0$, per ogni fissato $m \in \mathbb{R}$.

**Per casa 9.1.** Ripetere le considerazioni sul problema sopra in dimensione 3. □

Il gradiente di una funzione radiale e regolare fino nell'origine deve annullarsi nell'origine.
L'espressione del laplaciano di funzioni radiali ritrovata mediante il teorema della divergenza in dimensione 2.

**Per casa 9.2.** Trovare l'espressione del laplaciano di funzioni radiali mediante il teorema della divergenza in dimensione 3. □

Superfici di rotazione. Normale al grafico di una funzione.
Un campo vettoriale
$$H(x, y, z) = g(x, y, z)\, \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
è conservativo se e solo se
$$g(x, y, z) = h(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\,.$$

Forme differenziali, condizione di chiusura necessaria e sufficiente per l'esattezza in rettangoli o altri domini normali rispetto ai due assi.
Esempio di funzione $F$ con

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \equiv 0 \,, \qquad (x, y) \in \Omega \,,$$

ma $F$ dipendente da $x$ in $\Omega$, con $\Omega$ non normale rispetto all'asse $y$.

**Esercizio 9.3.** Ricerca degli estremi di

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \,, \qquad \text{su} \quad x^4 + y^4 = 1 \,,$$

e sua interpretazione geometrica. Risoluzione mediante i moltiplicatori di Lagrange e il metodo della parametrizzazione. □

**Per casa 9.4.** Ricercare gli estremi di

$$f(x, y) = x^4 + y^4 \,, \qquad \text{su} \quad x^2 + y^2 = 1 \,.$$

□

## 10. Mercoledì 31/05/2017

**Per casa 10.1.** 1) Studiare la funzione

$$f(x,y) = \int_x^y \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

2) Valutare l'ordine di infinito di

$$g(x) = \int_0^x e^{s^2}\,\mathrm{d}s\,, \qquad x \to +\infty\,.$$

$\square$

Fine del Corso.