



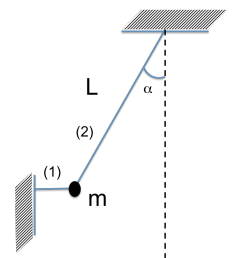
Prova d' esame del 21 giugno 2016 – I sessione a.a. 2015-16

**Risolvere, prima analiticamente e poi numericamente, gli esercizi seguenti.**

1. Un disco inizialmente fermo viene fatto ruotare con accelerazione angolare costante  $\dot{\omega}=500 \text{ mrad/s}^2$ . Dopo un tempo  $\Delta t_1=45 \text{ s}$  l'accelerazione angolare cessa e il disco ruota con velocità angolare costante per un tempo  $\Delta t_2=25 \text{ s}$ . Il disco decelera quindi costantemente per un tempo  $\Delta t_3=40 \text{ s}$  fino a fermarsi. Si determini:
- quanto vale la decelerazione angolare durante la fase di frenata;
  - quanti giri completi compie il disco prima di fermarsi completamente.

2. Una massa puntiforme  $m=0.5 \text{ kg}$  è tenuta in quiete da due fili (1) e (2) di massa trascurabile. Il filo (1) è orizzontale mentre il filo (2) di lunghezza  $L$  forma con la verticale un angolo  $\alpha = 60^\circ$ . Calcolare:

- le tensioni dei due fili nella situazione descritta;
- la tensione del filo (2) immediatamente dopo il taglio del filo (1);
- la tensione del filo (2) all'istante in cui questo transita per la verticale.

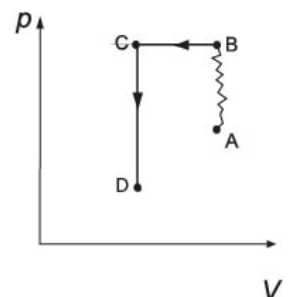


3. Una boa, assimilabile ad una sfera di raggio  $R$  e densità  $\rho_b$ , galleggia in un recipiente contenente acqua. La boa è in equilibrio ed in tale posizione emerge sopra la superficie libera una calotta sferica di altezza pari a  $R/2$ . Calcolare la densità della boa  $\rho_b$ .

*Opzionale:* si dimostri analiticamente che il volume di una calotta sferica di altezza  $h$  è uguale a  $V_{cs}=\pi h^2(R-h/3)$

4. Un gas perfetto è fatto espandere adiabaticamente e reversibilmente ( $A \rightarrow B$ ) in modo da triplicare il volume e diminuire la temperatura di un fattore  $x = 0,481$ . Viene quindi riportato alla temperatura iniziale mediante una trasformazione isocora ( $B \rightarrow C$ ). Dopo aver individuato se si tratta di un gas monoatomico o biatomico, calcolare la differenza percentuale di pressione tra lo stato iniziale  $A$  e lo stato finale  $C$ .

5. Una mole di gas perfetto monoatomico compie la trasformazione riportata in Figura:
- tratto  $AB$ : riscaldamento irreversibile a volume costante ottenuto mettendo il gas a diretto contatto con una sorgente a temperatura  $T_B=2T_A$
  - tratto  $BC$ : isobara  $V_C=V_B/2$ ;
  - tratto  $CD$ : isocora con  $T_D=T_C/2$
- Calcolare la variazione di entropia del gas e dell'Universo.



### Sezione TEORIA

**Rispondete facoltativamente, con essenzialità e correttezza, alle seguenti domande.**

- Ricavare il periodo di oscillazione di un pendolo semplice, nell'ipotesi di piccole oscillazioni.
- Spiegare perché l'energia interna di un gas perfetto è funzione della sola temperatura.



SOLUZIONI  
Prova d' esame del 21 giugno 2016 – I sessione a.a. 2015-16

**Esercizio 1**

Nel primo intervallo  $\Delta t_1 = 45 \text{ s}$  il moto è uniformemente accelerato, e quindi al suo termine si ha:

$$\omega = \dot{\omega} \Delta t_1 = 22.50 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{2} \dot{\omega} \Delta t_1^2 = 506.25 \text{ rad}$$

Nel secondo intervallo  $\Delta t_2 = 25 \text{ s}$  la velocità angolare rimane costante:  $\varphi_2 = \omega \Delta t_2 = 562.50 \text{ rad}$

Nel terzo intervallo  $\Delta t_3 = 40 \text{ s}$  la decelerazione angolare  $\dot{\omega}_3$  è costante:

$$\omega = \dot{\omega}_3 \Delta t_3 \Rightarrow \dot{\omega}_3 = 562.50 \frac{\text{mrad}}{\text{s}^2} \Rightarrow \varphi_3 = \omega \Delta t_3 - \frac{1}{2} \dot{\omega}_3 \Delta t_3^2 = 450 \text{ rad}$$

Il numero di giri completi complessivamente coperti è dunque:  $n = \frac{\sum \varphi_i}{2\pi} = 241.7$

---

**Esercizio 2**

a)  $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = 0 \Rightarrow \begin{cases} T_1 = mg \tan \alpha = 8.5 \text{ N} \\ T_2 = \sqrt{(mg)^2 + T_1^2} = 9.8 \text{ N} \end{cases}$

b) Subito dopo il taglio (O):  $\vec{T}_2' + m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} t) -mg \sin \alpha = ma_t \\ n) T_2' - mg \cos \alpha = ma_n = m \frac{v_o^2}{L} = 0 \end{cases}$

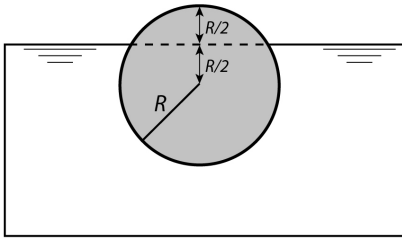
$$T_2' = mg \cos \alpha = 2.4 \text{ N}$$

c) Nella posizione verticale:  $\vec{T}_2'' + m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} t) 0 = ma_t \\ n) T_2'' - mg = m \frac{v_v^2}{L} \end{cases}$

Per la conservazione dell'energia:  $v_v = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)}$

$$T_2'' = mg + 2mg(1 - \cos \alpha) = 9.8 \text{ N}$$

### Esercizio 3



$$V_{immerso} = V_{sfera} - V_{calotta} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{5}{24}\pi R^3 = \frac{9}{8}\pi R^3$$

All'equilibrio la spinta di Archimede  $S_A$  deve eguagliare il peso della boa  $P_b$  :

$$S_A = P_b$$

$$S_A = \rho_{acqua} g V_{immerso} = \rho_{acqua} g \frac{9}{8}\pi R^3$$

$$P_b = \rho_b g V_{sfera} = \rho_b g \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\rho_b = 0.84 \rho_{acqua}$$

### Esercizio 4

Indicando con  $(T_A, V_A)$  e  $(T_B, V_B)$ , i valori iniziali e finali di temperatura e volume, rispettivamente, e ricavando  $\gamma$  dall'equazione dell'adiabatica si ha:

$$V_A^{\gamma-1} T_A = V_B^{\gamma-1} T_B \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\gamma-1} = x \quad (\gamma-1) \ln \frac{1}{3} = \ln x \Rightarrow \gamma = 1.66 \quad \left(= \frac{5}{3}\right)$$

Il gas è dunque monoatomico.

Nella seconda trasformazione (B→C) la temperatura è riportata al valore  $T_A$ . Per cui,  $p_A V_A = p_C V_C$ , e  $p_C = 0.33 p_A$ . La differenza percentuale di pressione tra lo stato iniziale e finale è dunque del 67%.

### Esercizio 5

Nel tratto AB:  $\Delta S_{AB} = n c_V \ln \frac{T_B}{T_A} \cong 8.64 \frac{J}{K}$

Nel tratto BC:  $\Delta S_{BC} = n c_V \ln \frac{T_C}{T_B} + n R \ln \frac{V_C}{V_B} \cong -14.40 \frac{J}{K}$

Nel tratto CD:  $\Delta S_{CD} = n c_V \ln \frac{T_D}{T_C} \cong -8.64 \frac{J}{K}$

$$\Delta S_{gas} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} \cong -14.40 \frac{J}{K}$$

Per quanto riguarda le sorgenti, nei due tratti reversibili si ha:  $\Delta S_{sorgenti} = -\Delta S_{gas}$

$$(\Delta S_{sorgenti})_{BC} = -(\Delta S_{gas})_{BC} \cong 14.40 \frac{J}{K}$$

$$(\Delta S_{sorgenti})_{CD} = -(\Delta S_{gas})_{CD} \cong 8.64 \frac{J}{K}$$

Nel tratto irreversibile AB si ha:  $(\Delta S_{sorgente})_{AB} = -n c_V \frac{T_B - T_A}{T_B} \cong -6.24 \frac{J}{K}$

$$\Delta S_{sorgenti} \cong 16.81 \frac{J}{K} \quad \Delta S_{universo} = \Delta S_{sorgenti} + \Delta S_{gas} \cong 2.41 \frac{J}{K}$$